

Л. А. Бессонов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

*Электромагнитное
поле*

Л. А. Бессонов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Электромагнитное поле

Издание седьмое,
переработанное
и дополненное

Допущено Министерством высшего
и среднего специального
образования СССР
в качестве учебника для студентов
электротехнических, энергетических
и приборостроительных специальностей
высших учебных заведений



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1978

ББК 31.2

Б 53

УДК 621.3(075.8)

Рецензент

Кафедра теоретических основ электротехники
Московского авиационного института

Бессонов Л. А.

Б 53 Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле. Учебник для студентов вузов. — 7-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. школа, 1978. — 231 с., ил.

В пер.: 65 к.

В книге рассмотрена теория электромагнитного поля. Все главы нового издания переработаны и дополнены. Включен новый материал: конформные преобразования с помощью интеграла Шварца, отражения в сфере и цилиндры, второй вариант метода интегральных уравнений, распространение волн в гиротропных средах и др. Введены вопросы и задачи для самопроверки. Предназначается для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов.

Б $\frac{30306-310}{001(01)-78}$ 100—78

ББК 31.2
6П2.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Седьмое издание учебника по теоретическим основам электротехники в отличие от предыдущих изданий выпущено в двух книгах. В первой книге рассмотрены вопросы теории линейных и нелинейных электрических цепей (I и II части курса ТОЭ), во второй — вопросы теории электромагнитного поля (III часть курса ТОЭ). Структура второй книги аналогична структуре первой.

Материал излагается малыми, удобными для восприятия порциями, сопровождается числовыми примерами. Все необходимые для понимания материала книги математические и физические пояснения даются по ходу изложения. В каждой главе имеются вопросы и задачи для самопроверки. Рекомендуемые для решения задачи указаны по сборнику задач [18].

Нормальным шрифтом (корпусом) в книге набран материал, обязательный для изучения студентами всех специальностей, в учебных планах которых имеется III часть курса ТОЭ. *Петитом* набран материал в неодинаковой степени обязательный для студентов различных специальностей. Какую часть набранного петитом материала следует изучить студенту, должна указать кафедра ТОЭ соответствующего вуза. По сравнению с предыдущим изданием все главы III части курса подверглись переработке. Так же как и в первой книге, во второй осуществлена перестановка некоторых глав и параграфов по сравнению с шестым изданием. Рассмотрены следующие новые вопросы, отсутствовавшие в предыдущем издании: зеркальные изображения в сфере и цилиндре, интеграл Шварца, второй вариант метода интегральных уравнений, распространение электромагнитных волн в гиротропных средах, полосковые линии, граничные условия Леонтовича, формулы Френеля, поле в пазу электрической машины, понятие о предельном волноводе и др.

Во второй книге помещен краткий обзор развития электротехники, охватывающий и теорию цепей и теорию поля. Часть справочного материала, необходимого для I, II и III частей курса (таблицы функций e^x , e^{-x} , $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$), помещена в первой книге. Остальной справочный материал (таблица функций Бесселя комплексного аргумента, свойства проводниковых и диэлектрических материалов) помещен во второй книге. При подготовке второй книги к изданию помощь оказали ст. преподаватель кафедры ТОЭ МИРЭА С. Э. Расовская и доц. С.А. Миленина.

Автор с благодарностью примет все замечания по улучшению учебника, которые просит направлять по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14, изд-во «Высшая школа».

Автор

Под *электромагнитным полем* понимают вид материи, характеризующийся совокупностью взаимно связанных и взаимно обуславливающих друг друга электрического и магнитного полей. Электромагнитное поле обладает характерными для него электрическими и магнитными свойствами, доступными наблюдению. Силовое воздействие поля на электрические заряды и токи, находящиеся в поле, положено в основу определения основных векторных величин, которыми характеризуют поле, напряженности электрического поля и магнитной индукции магнитного поля.

Электромагнитное поле может самостоятельно существовать в виде электромагнитных волн в пустоте. Это свидетельствует о том, что оно является особой формой материи. В то же время электромагнитное поле обладает энергией, массой и количеством движения, т. е. характеристиками обычной формы материи. Масса электромагнитного поля в единице объема определяется как частное от деления энергии поля в единице объема на квадрат скорости распространения электромагнитной волны в пустоте, равной скорости света. Количество движения электромагнитного поля, отнесенное к единице объема, равно произведению массы поля в единице объема на скорость распространения электромагнитной волны в пустоте (вакууме).

При распространении электромагнитного поля одновременно с движением потока электромагнитной энергии происходит движение массы поля и количества движения.

Масса электромагнитного поля, заключенная в единице объема, несоизмеримо мала по сравнению с массой (плотностью) всех известных веществ. Даже при максимально достижимых в настоящее время значениях напряженностей электрического и магнитного полей масса поля в единице объема оказывается равной $10^{-17} \div 10^{-12}$ кг/м³. Тем не менее наличие массы поля имеет принципиальное значение, поскольку в этом факте отражена известная инерционность процессов в электромагнитном поле.

В одних случаях электромагнитное поле распределено в пространстве непрерывно, в других — обнаруживает дискретную структуру, проявляющуюся в виде квантов излученного поля. Электромагнитное поле может превращаться в вещество, а вещество в поле. Так, электрон и позитрон превращаются в два кванта электромагнитного излучения, а при исчезновении фотона возникает пара — электрон и позитрон. Превращение поля в вещество, а вещества в поле соответствует превращению одного вида материи в другой. Пространство и время являющиеся формами существования электромагнитного поля.

При рассмотрении теории поля будем руководствоваться индуктивным методом, т. е. переходить от частного (от менее совершенной

структуры) к общему (к более совершенной структуре). В соответствии с этим сначала рассмотрим поля, неизменные во времени, когда электрическое и магнитное поля (две компоненты электромагнитного поля) можно рассматривать раздельно. Изложение начнем с электростатического поля.

ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 19.1. Определение электростатического поля. *Электростатическое поле* — это частный вид электромагнитного поля. Оно создается совокупностью электрических зарядов, неподвижных в пространстве по отношению к наблюдателю и неизменных во времени.

Из курса физики известно, что любое вещество состоит из элементарных заряженных частиц, окруженных электромагнитным полем.

Элементарные заряды (заряды электрона и протона) характеризуются связью с собственным и взаимодействием с внешними электрическими полями. В любом веществе всегда имеется микроскопическая неоднородность в пространстве. Элементарные заряженные частицы, входящие в состав атомов и молекул, находятся в непрерывном хаотическом движении. Следовательно, кроме микроскопической неоднородности в пространстве всегда имеется неодинаковость расположения элементарных зарядов в смежные моменты времени.

В теории поля осредняют микроскопические неоднородности вещества в пространстве и во времени, т. е. рассматривают процессы в макроскопическом смысле.

В заряженном теле (если общий заряд его неизменен во времени) элементарные заряды движутся хаотически. Поэтому даже в непосредственной близости от поверхности этого тела создаваемое элементарными зарядами магнитное поле практически отсутствует. Это и дает возможность рассматривать в электростатическом поле лишь одну электрическую компоненту электромагнитного поля.

Под *зарядом* (зарядом тела) понимают скалярную величину, равную алгебраической сумме элементарных электрических зарядов в этом теле.

В дальнейшем, как правило, будем иметь дело с полем, создаваемым в однородной и изотропной среде, т. е. в такой среде, электрические свойства которой одинаковы для всех точек поля и не зависят от направления. В ином случае сделаны соответствующие оговорки.

Электростатическое поле обладает способностью воздействовать на помещенный в него электрический заряд с механической силой, прямо пропорциональной величине этого заряда.

В основу определения электрического поля положено механическое его проявление. Оно описывается законом Кулона.

§ 19.2. Закон Кулона. Два точечных заряда q_1 и q_2 в вакууме взаимодействуют друг с другом с силой $\vec{F}$, прямо пропорциональной

произведению зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между ними. Эта сила направлена по линии, соединяющей точечные заряды (рис. 19.1). Заряды, имеющие одинаковые знаки, стремятся оттолкнуться друг от друга, а заряды противоположных знаков стремятся сблизиться:

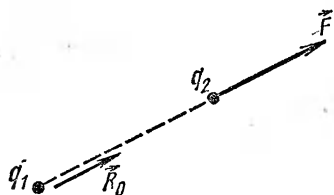


Рис. 19.1

$$\vec{F} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{R}_0, \quad (19.1)$$

где $\vec{R}_0$ — единичный вектор, направленный по линии, соединяющей заряды (см. рис. 19.1)*.

При использовании СИ и кратных долей единиц этой системы расстояние R измеряют в метрах (м), заряды — в кулонах (К); электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12}$ — в фарадах на метр (Ф/м); тогда силу получают в ньютонах.

Под точечными зарядами подразумевают следующее: *линейные размеры тел, на которых расположены взаимодействующие заряды, много меньше расстояния между телами.*

§ 19.3. Напряженность и потенциал электростатического поля. Любое поле характеризуется некоторыми основными величинами. Основными величинами, характеризующими электростатическое поле, являются напряженность $\vec{E}$ и потенциал ϕ .

Напряженность электростатического поля — величина векторная, определяемая в каждой точке и величиной и направлением; потенциал является величиной скалярной. Значение потенциала определяется в каждой точке поля некоторым числом.

Электростатическое поле определено, если известен закон изменения $\vec{E}$ или ϕ во всех точках этого поля.

Если в электростатическое поле поместить настолько малый (неподвижный) положительный заряд, что он своим присутствием не вызовет сколько-нибудь заметного перераспределения зарядов на телах, создающих поле, то отношение силы, действующей на заряд, к величине заряда q определяет напряженность поля в данной точке:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}. \quad (19.1a)$$

Таким образом, $\vec{E}$ это силовая характеристика поля, определенная при условии, что внесенный в данную точку поля заряд не искажил поля, существовавшего до внесения этого заряда. Отсюда следует, что сила $\vec{f}$, действующая на конечной величины точечный заряд q , внесенный в поле, будет равна $\vec{f} = q\vec{E}$, а напряженность численно равна силе, действующей на заряд, по величине равный единице.

Если поле создается несколькими зарядами ($q_1, q_2, q_3, \dots$), то его напряженность равна геометрической сумме напряженностей от каж-

* Стрелка над буквой означает вектор в пространстве.

дого из зарядов в отдельности: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$, т. е. при расчете электрического поля применим метод наложения.

Рассмотрим вопрос о работе, совершаемой силами поля при перемещении заряда, и о связанных с работой понятиях потенциала и разности потенциалов.

Поместим в электрическое поле некоторый заряд q . На заряд будет действовать сила $q\vec{E}$. Пусть заряд q из точки 1 переместился в точку 2 по пути 132 (рис. 19.2). Так как направление силы $q\vec{E}$, действующей на заряд в каждой точке пути, может не совпадать с элементом пути $d\vec{l}$, то работа на перемещение заряда на пути $d\vec{l}$ определится скалярным произведением силы на элемент пути $q\vec{E} d\vec{l}$. Работа, затраченная на перенос заряда из точки 1 в точку 2 по пути 132, определится как сумма элементарных работ $q\vec{E} d\vec{l}$. Эту сумму можно записать в виде линейного интеграла $q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$.

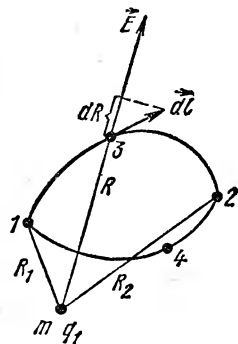


Рис. 19.2

Заряд q может быть любым. Положим его равным единице (единичный заряд). Под разностью потенциала $\varphi_1 - \varphi_2$ принято понимать работу, затрачиваемую силами поля при переносе единичного заряда из начальной точки 1 в конечную точку 2:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \quad (19.2)$$

Формула (19.2) позволяет определить разность потенциалов точек 1 и 2 как линейный интеграл от напряженности поля.

Если бы потенциал конечной точки пути 2 был равен нулю, то потенциал точки 1 определился бы так (при $\varphi_2 = 0$):

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l},$$

т. е. потенциал произвольной точки поля 1 может быть определен как работа, совершаемая силами поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки поля в точку поля, потенциал которой равен нулю.

За точку, имеющую нулевой потенциал, можно принять любую точку поля. Если такая точка выбрана, то потенциалы всех точек поля определяются единственным образом.

Нередко принимают, что точка с нулевым потенциалом находится в бесконечности. Поэтому, особенно в курсах физики, распространено определение потенциала как работы, совершаемой силами поля при переносе единичного заряда из данной точки поля в бесконечность:

$$\varphi_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} d\vec{l}.$$

Часто считают, что точка с нулевым потенциалом находится на поверхности земли (земля в условиях электростатики есть проводящее тело, поэтому безразлично, где именно — на поверхности земли или в толще ее — находится эта точка).

Таким образом, потенциал любой точки поля зависит от того, какой точке поля придан нулевой потенциал, т. е. потенциал определяется с точностью до постоянной величины. Однако это не имеет существенного значения, так как практически важен не потенциал какой-либо точки поля, а разность потенциалов и производная от потенциала по координатам.

При составлении разности потенциалов произвольную постоянную, с точностью до которой определяют потенциал, вычитают, и в разность потенциалов она не входит. На величине производной от потенциала по координатам произвольная постоянная также не скажется, поскольку производная от постоянной величины равна нулю.

§ 19.4. Электрическое поле — поле потенциальное. Составим выражение для разности потенциалов в поле точечного заряда. С этой целью положим, что в точке m рис. 19.2 находится положительный точечный заряд q_1 , создающий поле, а из точки 1 в точку 2 через промежуточную точку 3 перемещается единичный положительный заряд $q = 1$.

Обозначим: R_1 — расстояние от точки m до исходной точки 1; R_2 — расстояние от точки m до конечной точки 2; R — расстояние от точки m до произвольной точки 3 на пути 132. Направление напряженности поля $\vec{E}$ и направление элемента пути $\vec{dl}$ в промежуточной точке 3 показано на рис. 19.2. Скалярное произведение $\vec{E}d\vec{l} = E dR$, где dR — проекция элемента пути $\vec{dl}$ на направление радиуса, соединяющего точку m с точкой 3.

В соответствии с определением напряженности поля $\vec{E} = \vec{F}/q$. По закону Кулона

$$\vec{F} = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{R}_0.$$

Так как $|\vec{R}_0| = 1$ и $q = 1$, то модуль напряженности поля в поле точечного заряда

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Подставив в формулу (19.2) вместо $\vec{E}d\vec{l}$ величину $\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR$, получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E dR = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{dR}{R^2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (19.2)$$

Таким образом, разность потенциалов между исходной и конечной точками пути (точками 1 и 2) зависит только от положения этих точек и не зависит от пути, по которому происходило перемещение из

исходной точки в конечную точку. Другими словами, если перемещение из точки 1 в точку 2 будет происходить по какому-то другому пути, например по пути 142, то разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, полученная в этом случае, будет равна разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ при перемещении из точки 1 в точку 2 по пути 132.

Если поле создано совокупностью точечных зарядов, то этот вывод справедлив для поля, созданного каждым из точечных зарядов в отдельности. А так как для электрического поля в однородном и изотропном диэлектрике справедлив принцип наложения, то вывод о независимости величины разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ от пути, по которому происходило перемещение из точки 1 в точку 2, справедлив и для электрического поля, созданного совокупностью точечных зарядов.

Если пройти по замкнутому пути 13241 (см. рис. 19.2), то исходная точка пути 1 и конечная точка пути 2 совпадут, и тогда и левая и правая части формулы (19.2) будут равны нулю:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 = \oint \vec{E} \, d\vec{l}. \quad (19.3)$$

(Кружок на знаке интеграла означает, что интеграл берется по замкнутому контуру).

Соотношение (19.3) свидетельствует о том, что в электростатическом поле линейный интеграл от напряженности электрического поля, взятый вдоль любого замкнутого пути, равен нулю.

Физически это объясняется тем, что при движении вдоль замкнутого пути совершена определенная работа силами поля и такая же работа совершена внешними силами против сил поля.

Если условиться работу, совершенную силами поля, считать положительной, а работу, совершенную против сил поля, — отрицательной, то сумма «положительных» и «отрицательных» работ равна нулю.

Равенство (19.3) можно трактовать и так: циркуляция вектора $\vec{E}$ вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Это соотношение выражает собой основное свойство электростатического поля. Поля, для которых выполняются подобного рода соотношения, называют *потенциальными*. Потенциальными являются не только электростатические поля, но и все гравитационные поля (поля сил тяготения между материальными телами), установившиеся температурные поля около нагретых тел и т. д.

§ 19.5. Силовые и эквипотенциальные линии. Электростатическое поле можно характеризовать совокупностью силовых и эквипотенциальных линий. *Силовая линия* — это мысленно проведенная в поле линия, начинающаяся на положительно заряженном теле и оканчивающаяся на отрицательно заряженном теле. Проводится она таким образом, что касательная к ней в любой точке ее дает направление напряженности поля $\vec{E}$ в этой точке. Вдоль силовой линии передвигался бы весьма малый положительный заряд, если бы он имел возможность свободно перемещаться в поле и если бы он не обладал инерцией. Таким образом, силовые линии имеют начало (на положительно заря-

женном теле) и конец (на отрицательно заряженном теле). Так как положительный и отрицательный заряды, создающие поле, не могут быть в одной и той же точке, то силовые линии электрического поля не могут быть линиями, замкнутыми сами на себя.

В электростатическом поле могут быть проведены эквипотенциальные (равнопотенциальные) поверхности. Под *эквипотенциальной поверхностью* понимают совокупность точек поля, имеющих один и тот же потенциал. Если мысленно рассеять электростатическое поле какой-либо секущей плоскостью, то в полученном сечении будут видны следы

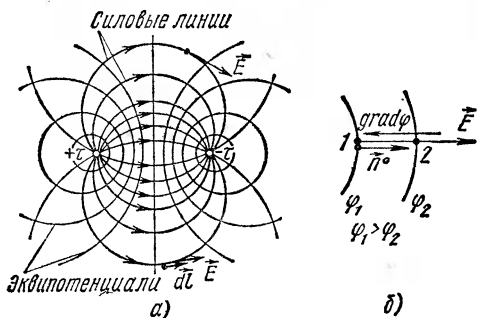


Рис. 19.3

пересечения плоскости с эквипотенциальными поверхностями. Их называют *эквипотенциальными линиями* (или эквипотенциалами). Из самого определения эквипотенциальной поверхности следует, что перемещение по ней не вызовет изменения потенциала. Точно так же и перемещение вдоль эквипотенциальной линии не связано с изменением потенциала.

Эквипотенциальные и силовые линии в любой точке поля пересекаются под прямым углом. На рис. 19.3, а изображены два заряженных тела и проведено несколько силовых и эквипотенциальных линий.

В противоположность силовым эквипотенциальные линии электростатического поля являются замкнутыми сами на себя линиями. Как уже говорилось, между напряженностью электрического поля $\vec{E}$ и потенциалом ϕ существует связь интегрального вида (19.2). Кроме нее, между $\vec{E}$ и ϕ существует и связь дифференциального вида.

§ 19.6. Выражение напряженности в виде градиента потенциала. Электростатическое поле, как отмечалось ранее, является полем потенциальным. Между двумя близко расположенными точками поля имеется в общем случае некоторая разность потенциалов.

Если эту разность разделить на кратчайшее расстояние между взятыми точками, то полученная величина будет характеризовать скорость изменения потенциала в направлении кратчайшего расстояния между точками. Эта скорость будет зависеть от направления, вдоль которого взяты точки.

В курсе математики пользуются понятием градиента скалярной функции. *Градиентом скалярной функции* называют скорость изменения скалярной функции, взятую в направлении ее наибольшего возрастания. В определении градиента существенны два положения: 1) направление, в котором берутся две близлежащие точки, должно быть таким, чтобы скорость изменения потенциала была максимальна;

2) направление таково, что скалярная функция в этом направлении возрастает (не убывает).

На рис. 19.3, б изображены отрезки двух весьма близко расположенных эквипотенциалей. Одна из них имеет потенциал φ_1 , другая — φ_2 . Пусть $\varphi_1 > \varphi_2$. Тогда, в соответствии с приведенным определением, градиент потенциала изобразим на рис. 19.3, б вектором, перпендикулярным к эквипотенциальным линиям и направленным от φ_2 к φ_1 (в сторону увеличения потенциала).

Напряженность электрического поля направлена от более высокого потенциала (φ_1) к более низкому (φ_2). Если через dn обозначить расстояние по перпендикуляру (по нормали) между эквипотенциальными поверхностями, а через $\vec{dn}$ — вектор, совпадающий с направлением $\vec{E}$: $\vec{dn} = \vec{n}^\circ dn$ (здесь $\vec{n}^\circ$ — единичный вектор по направлению $\vec{dn}$), то на основании соотношения (19.2) можно записать выражение:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl} \approx \vec{E} \cdot \vec{dn} = -d\varphi,$$

где $d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ — приращение потенциала при переходе от точки 1 к точке 2.

Так как векторы $\vec{E}$ и $\vec{dn}$ совпадают по направлению, то скалярное произведение $\vec{E} \cdot \vec{dn}$ равно произведению модуля $\vec{E}$ на модуль $\vec{dn}$ ($\vec{E} \cdot \vec{dn} = E dn$).

Таким образом, $E dn = -d\varphi$. Отсюда модуль напряженности поля $E = -\frac{d\varphi}{dn}$. Вектор напряженности поля $\vec{E} = E \vec{n}^\circ$. Следовательно,

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn} \vec{n}^\circ. \quad (19.4)$$

В свою очередь, из определения градиента следует, что

$$\text{grad } \varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{dn} (-\vec{n}^\circ) = -\frac{d\varphi}{dn} (-\vec{n}^\circ). \quad (19.5)$$

Сопоставляя (19.4) и (19.5), замечаем, что

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (19.6)$$

Соотношение (19.6) можно истолковать следующим образом: напряженность в какой-либо точке поля равна скорости изменения потенциала в этой точке, взятой с обратным знаком. Знак минус означает, что направление $\vec{E}$ и направление $\text{grad } \varphi$ противоположны (см. рис. 19.3, б).

Нормаль $\vec{dn}$ в общем случае может быть расположена так, что не совпадет с направлением какой-либо координатной оси. И потому градиент потенциала в общем случае можно представить в виде суммы трех проекций по координатным осям. Например, в декартовой системе координат:

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (19.7)$$

где $\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ — скорость изменения φ в направлении оси x ; $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ — числовое значение (модуль) скорости (скорость — величина векторная); $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные орты соответственно по осям x, y, z декартовой системы.

Вектор напряженности $\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z$. Таким образом,

$$\vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z = -\left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right).$$

Два вектора равны только тогда, когда равны друг другу их соответствующие проекции. Следовательно,

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (19.8)$$

Соотношения (19.8) следует понимать так: проекция напряженности поля на ось x равна проекции скорости изменения потенциала вдоль оси x , взятой с обратным знаком, и т. д.

§ 19.7. Дифференциальный оператор Гамильтона (оператор набла). Для сокращения записи различных операций над скалярными и векторными величинами употребляется дифференциальный оператор Гамильтона (оператор набла).

Под *дифференциальным оператором Гамильтона* (оператором набла) понимают сумму частных производных по трем координатным осям, умноженных на соответствующие единичные векторы (орты). В декартовой системе координат его записывают так:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Он сочетает в себе векторные и дифференцирующие свойства и может быть применен к скалярным и векторным функциям. Ту функцию, действие над которой хотят произвести (дифференцирование ее по координатам, или «пространственное» дифференцирование), пишут справа от оператора набла.

Применим оператор ∇ к потенциалу φ . С этой целью запишем

$$\nabla \varphi = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Если сравнить последнее выражение с (19.7), то можно заметить, что правые части у них одинаковы. Следовательно, равны и левые: $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$, т. е. запись $\nabla \varphi$ эквивалентна записи $\text{grad } \varphi$, а приписывание слева к какой-либо скалярной функции (в рассматриваемом случае к φ) оператора ∇ означает взятие градиента от этой скалярной функции.

§ 19.8. Выражение градиента потенциала в цилиндрической и сферической системах координат. В цилиндрической системе (обозначения см. на рис. 19.4, а):

$$\text{grad } \varphi = \vec{r}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{\alpha}_0 \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \vec{z}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (19.9)$$

В сферической системе (обозначения см. на рис. 19.4, б):

$$\text{grad } \varphi = \vec{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \vec{\theta} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \vec{\alpha} \cdot \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \quad (19.10)$$

§ 19.9. Поток вектора через элемент поверхности и поток вектора через поверхность. Пусть в векторном поле (например, в поле вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$) есть некоторый элемент поверхности, площадь которого с одной стороны численно равна dS . Выберем положительное направление нормали (перпендикуляра) к элементу поверхности. Вектор $d\vec{S}$ в некотором масштабе на рис. 19.5

равен площади элемента поверхности, а его направление совпадает с положительным направлением нормали. Будем

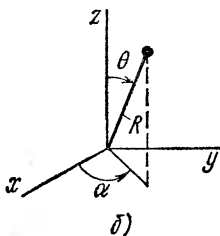
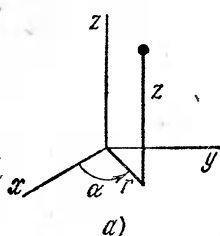


Рис. 19.4

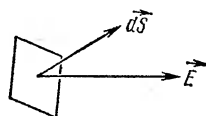


Рис. 19.5

полагать, что площадь элемента достаточно мала, чтобы в пределах этого элемента вектор $\vec{E}$ можно было считать одним и тем же во всех точках.

Если бы $\vec{E}$ было перпендикулярно $d\vec{S}$, то вектор $\vec{E}$ не пронизывал бы элемент поверхности; если $\vec{E}$ направлено по $d\vec{S}$, то через данный элемент поверхности будет максимальный поток вектора $\vec{E}$. В общем случае поток вектора $\vec{E}$ через элемент поверхности определится скалярным произведением $\vec{E} d\vec{S}$.

Поток вектора через элемент поверхности $\vec{E} d\vec{S}$ является скаляром алгебраического характера. Поток вектора может оказаться положительным или отрицательным. Положительное значение потока $\vec{E} d\vec{S}$ означает, что он направлен в сторону $d\vec{S}$, отрицательное его значение, что он направлен в обратную сторону.

Если поверхность, через которую определяют поток вектора, велика, то тогда нельзя считать, что во всех ее точках $\vec{E}$ одна и та же. В этом случае поверхность подразделяют на отдельные элементы малых размеров, и полный поток вектора через поверхность равняется алгебраической сумме потоков через все элементы поверхности. Сумму потоков можно записать в виде интеграла: $\int_s \vec{E} d\vec{S}$.

Значок s под знаком интеграла означает, что суммирование производится по элементам поверхности.

Если поверхность, через которую определяют поток вектора, замкнутая, то на знаке интеграла ставят кружок: $\oint_s \vec{E} d\vec{S}$.

§ 19.10. Свободные и связанные заряды. Поляризация вещества. *Свободными* называют заряды, которые под воздействием сил поля могут свободно перемещаться в веществе, их перемещение не ограничивается внутримолекулярными силами.

Под *связанными* понимают электрические заряды, входящие в состав вещества и удерживаемые в определенных положениях внутримолекулярными силами. Такие заряды «связаны» с данным веществом, неотделимы от него. Сумма положительных связанных зарядов равна сумме отрицательных связанных зарядов.

Если какое-либо диэлектрическое тело поместить в электрическое поле, то оно поляризуется.

Под *поляризацией* понимают упорядоченное изменение расположения связанных зарядов в теле, вызванное электрическим полем. Это изменение расположения проявляется в том, что отрицательные связанные заряды в теле переместятся в направлении более высокого потенциала, а положительные связанные заряды переместятся в сторону более низкого потенциала. Заряды сместятся настолько, что силы воздействия электрического поля на связанные заряды уравниваются внутримолекулярными силами. В результате поляризации на поверхности вещества как бы обнажаются связанные заряды.

§ 19.11. Вектор поляризации. Произведение $\vec{q}\vec{l}$ называют электрическим моментом двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов, находящихся друг от друга на расстоянии l (диполя). Это векторная величина, направленная от заряда $-q$ к заряду $+q$ (рис. 19.6, а).

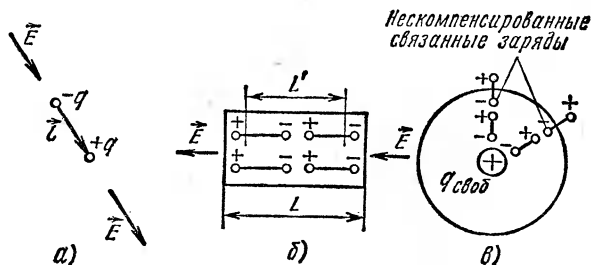


Рис. 19.6

В поляризованном веществе молекулы в электрическом отношении представляют собой диполи. Под действием внешнего электрического поля диполи стремятся ориентироваться в пространстве таким образом, чтобы электрический момент их был направлен параллельно вектору напряженности электрического поля. Практический интерес представляет электрический момент не одной молекулы, не одной пары зарядов, а суммы диполей, находящихся в единице объема вещества. Электрический момент суммы диполей, находящихся в объеме веще-

ства V , отнесенный к объему V при стремлении V к нулю, называют *вектором поляризации* (поляризованностью) и обозначают $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum q_l}{V}. \quad (19.11)$$

Для большинства диэлектриков $\vec{P}$ пропорционально напряженности электрического поля $\vec{E}$. Коэффициент пропорциональности между ними $\kappa = \epsilon_0 \chi$ (χ — электрическая восприимчивость):

$$\vec{P} = \kappa \vec{E}. \quad (19.12)$$

Диэлектрики в зависимости от происходящих в них процессов при поляризации можно подразделить на две группы.

В первую группу входят диэлектрики, молекулы которых при отсутствии внешнего электрического поля электрически нейтральны,

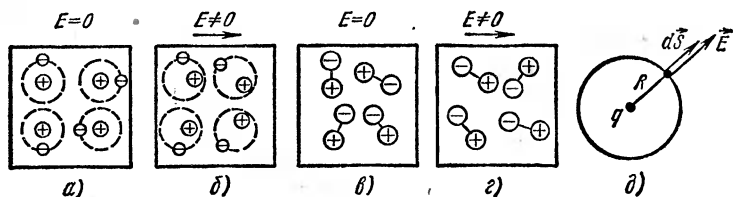


Рис. 19.7

т. е. в них центры действия положительных и отрицательных зарядов совпадают. К числу таких диэлектриков относятся водород, азот, парaffин и др.

Поляризация в диэлектриках первой группы заключается в том, что под действием внешнего электрического поля центр действия положительного заряда молекулы смещается по внешнему полю, а центр действия отрицательных зарядов (электронная орбита) — против поля. В результате молекула становится диполем.

Это смещение зарядов молекулы пропорционально величине напряженности внешнего поля. Смещению противодействуют внутримолекулярные силы.

Во вторую группу входят диэлектрики, молекулы которых при отсутствии внешнего электрического поля представляют собой диполи, т. е. центры действия положительных и отрицательных зарядов этих молекул при отсутствии внешнего электрического поля не совпадают (полярные молекулы). Диэлектриком с полярными молекулами является, например, хлористый водород.

Благодаря тепловому движению диполи располагаются хаотично, так что при отсутствии внешнего электрического поля их электрические поля взаимно нейтрализуются.

Поляризация в диэлектриках второй группы состоит в том, что полярные молекулы стремятся повернуться таким образом, чтобы их электрический момент был направлен по внешнему электрическому полю.

Поляризацию диэлектриков первой группы иллюстрирует рис. 19.7, а и б; второй группы — рис. 19.7, в и г. Рис. 19.7, а и в соответствуют случаю, когда внешнее поле отсутствует; рис. 19.7, б и г — при наличии внешнего поля.

§ 19.12. Вектор электрической индукции $\vec{D}$. Кроме векторов $\vec{E}$ и $\vec{P}$ в электротехнических расчетах используют еще вектор электрической индукции, или вектор электрического смещения $\vec{D}$.

Вектор $\vec{D}$ равен сумме двух векторов: вектора $\epsilon_0 \vec{E}$, характеризующего поле в вакууме, и вектора поляризации $\vec{P}$, характеризующего способность диэлектрика в рассматриваемой точке поля поляризоваться: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

Так как

$$\vec{P} = \kappa \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} \frac{\kappa}{\epsilon_0}, \quad (19.13)$$

то

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \left(1 + \frac{\kappa}{\epsilon_0} \right) = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_a \vec{E}, \quad (19.14)$$

где

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon^*; \quad \epsilon = 1 + \chi. \quad (19.15)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость имеет нулевую размерность; она показывает, во сколько раз абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества (ϵ_a) больше, чем электрическая постоянная ϵ_0 , характеризующая электрические свойства вакуума.

В системе СИ $[D] = [P] = \text{к/м}^2$.

§ 19.13. Теорема Гаусса в интегральной форме. Теорема Гаусса является одной из важнейших теорем электростатики. Она соответствует закону Кулона и принципу наложения. Теорему можно сформулировать и записать тремя способами.

1. Поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность, окружающую некоторый объем, равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\oint_s \vec{D} \, d\vec{S} = \sum q_{\text{своб.}} \quad (19.16)$$

Из формулы (19.16) следует, что вектор $\vec{D}$ является такой характеристикой поля, которая при прочих равных условиях не зависит от диэлектрических свойств среды (от величины ϵ).

2. Так как $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$, то теорему Гаусса для однородной и изотропной среды можно записать и в такой форме:

$$\oint \vec{E} \, d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{своб.}}}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad (19.17)$$

* Раньше относительную диэлектрическую проницаемость обозначали ϵ_r , а абсолютную проницаемость — ϵ , т. е. $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$.

т. е. поток вектора напряженности электрического поля сквозь любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности, разделенной на произведение $\epsilon_0 \epsilon$.

Из формулы (19.17) следует, что вектор $\vec{E}$ представляет собой характеристику поля, которая в отличие от вектора $\vec{D}$ при прочих равных условиях *зависит* от диэлектрических свойств среды (от величины ϵ).

Поток вектора $\vec{D}$ определяется лишь суммой зарядов и не зависит от их расположения внутри замкнутой поверхности *.

3. Поток вектора $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность создается не только суммой свободных зарядов ($\sum q_{\text{своб}}$), но и суммой связанных зарядов ($\sum q_{\text{связ}}$), находящихся внутри поверхности.

Из курса физики известно, что поток вектора поляризации сквозь любую замкнутую поверхность равен взятой с обратным знаком алгебраической сумме связанных зарядов, находящихся внутри этой поверхности:

$$\sum q_{\text{связ}} = -\oint \vec{P} \cdot d\vec{s}. \quad (a)$$

Напомним вывод формулы (a). С этой целью сначала покажем, что плотность поверхностных связанных зарядов на поверхности раздела поляризованного диэлектрика и вакуума равна модулю вектора поляризации.

На рис. 19.6, б показано расположение диполей в поляризованном диэлектрике длиной L , сечением S . На торцах диэлектрика образуются связанные заряды. Поверхностную плотность их обозначим через σ . На длине L' положительные и отрицательные заряды взаимно компенсируют друг друга. Поэтому поляризованный диэлектрик (рис. 19.6, б) можно рассматривать как диполь длиной L с сосредоточенными на концах зарядами σS .

Электрический момент всего диэлектрика длиной L равен σSL . Электрический момент единицы объема диэлектрика

$$P = \frac{\sigma SL}{V} = \frac{\sigma SL}{SL} = \sigma.$$

Таким образом, плотность связанных зарядов на торцах поляризованного диэлектрика равна модулю вектора поляризации $\vec{P}$ (вектор перпендикулярен торцам). На рис. 19.6, в изображен свободный положительный заряд, вызвавший поляризацию окружающего его диэлектрика.

Окружим заряд сферой и подсчитаем нескомпенсированные связанные заряды, попавшие внутрь сферы. Нескомпенсированными связанными зарядами оказываются заряды диполей, пересекаемых поверхностью S .

Так как поверхностная плотность их равна σ , то

$$\sum q_{\text{связ}} = -\oint \sigma dS = -\oint \vec{P} \cdot d\vec{s}.$$

Знак минус появился вследствие того, что знак нескомпенсированных связанных зарядов противоположен знаку свободного заряда (см. рис. 19.6, в).

* Теорема Гаусса [формула (19.16) или (19.17)] применима не только к электростатическому полю, но и к переменному электромагнитному полю при условии, что расстояние от заряда, создающего поле, до точки, в которой определяют напряженность, должно быть много меньше длины электромагнитной волны (подробнее см. § 26.6).

Распространил теорему Гаусса на переменное электромагнитное поле (постулировал возможность ее применения) Д. Максвелл. Поэтому теорему Гаусса в применении к переменному электромагнитному полю в литературе называют *постулатом Максвелла*.

Формулу (19.16) можно переписать следующим образом:

$$\oint \vec{D} \, d\vec{S} = \oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \, d\vec{S} = \epsilon_0 \oint \vec{E} \, d\vec{S} + \oint \vec{P} \, d\vec{S} = \sum q_{\text{своб.}}$$

Следовательно,

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \, d\vec{S} = \sum q_{\text{своб.}} - \oint \vec{P} \, d\vec{S} = \sum q_{\text{своб.}} + \sum q_{\text{связ}}$$

или

$$\oint \vec{E} \, d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{своб.}} + \sum q_{\text{связ}}}{\epsilon_0}. \quad (19.17')$$

Формулы (19.17) и (19.17') отличаются своими правыми частями.

§ 19.14. Применение теоремы Гаусса для определения напряженности и потенциала в поле точечного заряда. Теорему Гаусса в интегральной форме можно использовать для нахождения напряженности или электрического смещения в какой-либо точке поля, если через эту точку можно провести замкнутую поверхность таким образом, что все точки этой поверхности будут в одинаковых (симметричных) условиях по отношению к заряду, находящемуся внутри замкнутой поверхности.

Такой поверхностью является обычно сфера (если заряд точечный) или боковая поверхность цилиндра (если заряд «линейный»). При этом в силу симметричного расположения всех точек поверхности относительно заряда числовое значение напряженности поля в различных точках этой поверхности будет одинаковым.

В качестве примера использования теоремы Гаусса найдем напряженность поля, создаваемую точечным зарядом в точке, удаленной на расстоянии R от заряда. С этой целью проведем через заданную точку сферическую поверхность радиусом R , полагая, что заряд находится в центре сферы, и применим к этой сфере теорему Гаусса (см. рис. 19.7, д).

Элемент поверхности сферы $d\vec{S}$ перпендикулярен к поверхности сферы * и направлен в сторону внешней (по отношению к объему внутри поверхности) нормали.

В данном примере в каждой точке сферы $\vec{E}$ и $d\vec{S}$ совпадают по направлению. Угол между ними равен нулю. Если учесть, что числовое значение $\vec{E}$ во всех точках сферы одно и то же, то E можно вынести из-под интеграла:

$$\oint \vec{E} \, d\vec{S} = \oint E \, dS \cos 0^\circ = E \oint dS = E \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

Следовательно, напряженность, создаваемая точечным зарядом q на расстоянии R от него,

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2}. \quad (19.18)$$

* Имеется в виду вектор, изображающий элемент поверхности сферы.

В силу сферической симметрии напряженность поля имеет только одну R -ю составляющую в сферической системе координат. Значит

$$E = E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = -\frac{d\varphi}{dR}.$$

Отсюда

$$\varphi = - \int E dR = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + C. \quad (19.19)$$

Таким образом, потенциал в поле точечного заряда обратно пропорционален первой степени расстояния R от точечного заряда до точки, в которой определяется потенциал; C представляет собой постоянную интегрирования, с точностью до которой определяется потенциал. Напомним, что аналогичные выражения для E и φ были получены в § 19.4 при использовании закона Кулона.

§ 19.15. Теорема Гаусса в дифференциальной форме. Теорема Гаусса в интегральной форме выражает связь между потоком вектора $\vec{D}$ через поверхность S , ограничивающую некоторый объем, и алгебраической суммой зарядов, находящихся внутри этого объема. С помощью теоремы Гаусса в интегральной форме нельзя определить, как связан исток линий $\vec{D}$ в данной точке поля с плотностью свободных зарядов в той же точке поля. Ответ на этот вопрос дает дифференциальная форма теоремы Гаусса. Чтобы прийти к ней, разделим обе части уравнения (19.16) на одну и ту же скалярную величину — на объем V , находящийся внутри замкнутой поверхности S :

$$\frac{\oint \vec{D} d\vec{S}}{V} = \frac{\sum q_{\text{своб}}}{V}. \quad (a)$$

Выражение (a) остается справедливым для объема V любой величины. Устремим объем к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{D} d\vec{S}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum q_{\text{своб}}}{V}. \quad (б)$$

При стремлении объема к нулю $\oint \vec{D} d\vec{S}$ также стремится к нулю, но отношение двух бесконечно малых величин $\oint \vec{D} d\vec{S}$ и V есть величина конечная*. Предел отношения потока векторной величины сквозь замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем, к объему V называют *дивергенцией вектора $\vec{D}$* ($\text{div } \vec{D}$). Часто вместо термина «дивергенция» употребляют термин «расхождение» или «исток» вектора $\vec{D}$.

* В ч. III учебника неоднократно использованы величины, которые определяются при стремлении рассматриваемого объема или площади к нулю.

Стремление к нулю не следует понимать дословно: речь идет о таком уменьшении линейных размеров объема или площади, при котором еще не сказывается дискретность материи.

В правой части выражения (б) находится объемная плотность свободного заряда, ее обозначают $\rho_{\text{своб}}$.

Таким образом, теорему Гаусса в дифференциальной форме записывают следующим образом (первая форма записи):

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб}}, \quad (19.20)$$

т. е. исток линий $\vec{D}$ в данной точке поля определяется величиной плотности свободных зарядов в этой точке. Если объемная плотность зарядов в данной точке положительна ($\rho_{\text{своб}} > 0$), то из бесконечно малого объема, окружающего данную точку поля, линии вектора $\vec{D}$ исходят (исток положителен, рис. 19.8, а). Если в данной точке поля

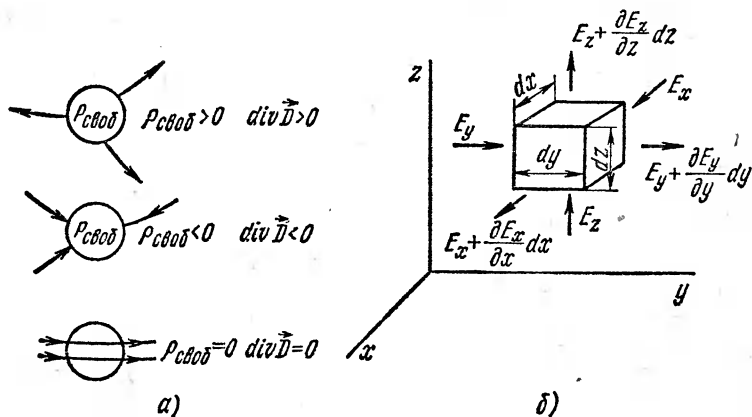


Рис. 19.8

$\rho_{\text{своб}} < 0$, то в бесконечно малый объем, внутри которого находится данная точка, линии вектора $\vec{D}$ входят. И, наконец, если в какой-либо точке поля $\rho_{\text{своб}} = 0$, то в данной точке поля нет ни истока, ни стока линий $\vec{D}$, т. е. в данной точке линии вектора $\vec{D}$ не начинаются и не заканчиваются.

Если среда однородна и изотропна, то ее $\epsilon_a = \text{const}$. Вместо (19.20) запишем выражение: $\operatorname{div} \epsilon_a \vec{E} = \rho_{\text{своб}}$.

Вынесем ϵ_a за знак дивергенции:

$$\epsilon_a \operatorname{div} \vec{E} = \rho_{\text{своб}};$$

следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho_{\text{своб}}/\epsilon_a. \quad (19.21)$$

Формула (19.21) представляет собой вторую форму записи теоремы Гаусса. Она справедлива только для однородной и изотропной среды. Для неоднородной среды ϵ_a является функцией координат и потому ϵ_a не может быть вынесена за знак дивергенции.

Уравнение (19.17') в дифференциальной форме записывают так (третья форма записи):

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}}}{\epsilon_0}. \quad (19.21')$$

Следовательно, истоком вектора $\vec{E}$ в отличие от истока вектора $\vec{D}$ являются не только свободные, но и связанные заряды.

В различных системах координат $\operatorname{div} \vec{E}$ раскрывается по-своему.

§ 19.16. Вывод выражения для $\operatorname{div} \vec{E}$ в декартовой системе координат. Выделим в пространстве весьма малый параллелепипед с ребрами dx, dy, dz . Расположим ребра параллелепипеда параллельно осям декартовой системы (рис. 19.8, б). Для нахождения истока вектора $\vec{E}$ из данного объема составим разность потоков, выходящих из объема и входящих в него, и разделим разность потоков на величину объема параллелепипеда, равную $dx dy dz$.

Левую грань площадью $dx dz$ пронизывает только одна составляющая вектора $\vec{E}$, т. е. составляющая $j\vec{E}_y$, остальные ($i\vec{E}_x$ и $k\vec{E}_z$) скользят по грани. Поток вектора $\vec{E}$, входящий в эту грань, равен $E_y dx dz$.

Так как $\vec{E}$ есть функция координат, то и ее составляющие также являются функциями координат. Правая грань площадью $dx dz$ отстоит от левой грани на расстоянии dy . Проекция вектора $\vec{E}$ на ось y для нее равна $E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy$, где $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ — скорость изменения E_y в направлении оси y ; $\frac{\partial E_y}{\partial y} dy$ — приращение «игрековой» составляющей напряженности поля на пути dy .

Поток, выходящий из правой грани площадью $dx dz$, равен $(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy) dx dz$. Исток через грани площадью $dx dz$ равен $\frac{\partial E_y}{\partial y} dx dy dz$. Таким же путем получим разность потоков через грани площадью $dy dz$: $\frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$.

Разность потоков через грани $dx dy$ (верхнюю и нижнюю стенки объема) равна $\frac{\partial E_z}{\partial z} dx dy dz$.

Для нахождения $\operatorname{div} \vec{E}$ сложим разности потоков через все грани и поделим на объем параллелепипеда $dx dy dz$, получим

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (19.22)$$

§ 19.17. Использование оператора набла для записи операции взятия дивергенции. Ранее было показано, что умножение оператора ∇ на скалярную функцию равносильно взятию градиента от этой скалярной функции. Покажем, что скалярное умножение оператора ∇ на векторную функцию, например на функцию $\vec{E}$, означает взятие дивергенции от этой векторной функции.

Произведение $\nabla \vec{E}$ можно записать так:

$$\begin{aligned}\nabla \vec{E} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z)^* = \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.\end{aligned}\quad (19.23)$$

Правые части (19.22) и (19.23) равны; следовательно, должны быть равны и левые их части. Поэтому $\nabla \vec{E} = \text{div } \vec{E}$, т. е., действительно, умножение оператора ∇ на вектор $\vec{E}$ означает взятие дивергенции от этого вектора.

§ 19.18. Выражение $\text{div } \vec{E}$ в цилиндрической и сферической системах координат. Без вывода запишем выражение $\text{div } \vec{E}$ в цилиндрической системе координат

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (19.24)$$

в сферической системе координат

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} (R^2 E_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha}. \quad (19.25)$$

§ 19.19. Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа. Уравнения Пуассона и Лапласа являются основными дифференциальными уравнениями электростатики. Они вытекают из теоремы Гаусса в дифференциальной форме. Действительно, известно, что $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$. В то же время согласно теореме Гаусса (19.21): $\text{div } \vec{E} = \rho_{\text{своб}}/\epsilon_a$.

Подставив в (19.21) $\vec{E}$ из (19.6), получим

$$\text{div } \vec{E} = \text{div } (-\text{grad } \varphi) = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}.$$

Вынесем минус за знак дивергенции:

$$\text{div grad } \varphi = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}.$$

Вместо $\text{grad } \varphi$ запишем его эквивалент $\nabla \varphi$; вместо div напомним ∇ . Тогда

$$\nabla (\nabla \varphi) = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}, \quad (19.26')$$

или

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}. \quad (19.26)$$

* Почленно умножаем слагаемые первой скобки на слагаемые второй скобки. Учитываем, что скалярное произведение одноименных ортов равно единице, а разноименных равно нулю: $\vec{i} \vec{i} = \vec{j} \vec{j} = \vec{k} \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1$; $\vec{i} \vec{j} = \vec{i} \vec{k} = \vec{j} \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$.

Уравнение (19.26) называют *уравнением Пуассона*. Частный вид уравнения Пуассона, когда $\rho_{\text{своб}} = 0$, называют *уравнением Лапласа*. Уравнение Лапласа записывают так:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (19.27)$$

Оператор $\nabla^2 = \text{div grad}$ называют *оператором Лапласа*, или *лапласианом*, и иногда обозначают еще символом Δ . Поэтому можно встретить и такую форму записи уравнения Пуассона:

$$\Delta \varphi = - \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}.$$

Раскроем $\nabla^2 \varphi$ в декартовой системе координат. С этой целью произведение двух множителей ∇ и $\nabla \varphi$ запишем в развернутом виде:

$$\nabla (\nabla \varphi) = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Произведем почленное умножение и получим

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Таким образом, уравнение Пуассона в декартовой системе координат записывают следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}. \quad (19.28)$$

Уравнение Лапласа в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (19.29)$$

Приведем без вывода выражения $\nabla^2 \varphi$:
в цилиндрической системе координат

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (19.30)$$

в сферической системе координат

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \quad (19.31)$$

Уравнение Пуассона выражает связь между частными производными второго порядка от φ в любой точке поля и объемной плотностью свободных зарядов в этой точке поля. В то же время потенциал в какой-либо точке поля зависит от всех зарядов, создающих поле, а не только от величины свободного заряда, находящегося в данной точке. Уравнение Пуассона применяют при исследовании потенциальных полей (электрических и магнитных) с 1820 г.

Уравнение Лапласа (1780 г.) первоначально было применено для описания потенциальных полей небесной механики и впоследствии использовано для описания электрических полей.

Рассмотрим вопрос о том, как в общем виде можно записать решение уравнения Пуассона.

Положим, что в объеме V есть объемные (ρ), поверхностные (σ) и линейные (τ) заряды. Эти заряды представим в виде совокупностей точечных зарядов: ρdV , σdS , τdl ; dV — элемент объема; dS — элемент заряженной поверхности; dl — элемент длины заряженной оси. Составляющая потенциала $d\phi$ в некоторой точке пространства, удаленной от ρdV на расстояние R , в соответствии с формулой (19.19) равна $\frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_a R}$.

Составляющие потенциала от поверхностного и линейного зарядов, если рассматривать их как точечные, определим аналогичным образом:

$$\frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_a R} \text{ и } \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_a R}.$$

Полное значение ϕ определим как сумму (интеграл) составляющих потенциала от всех зарядов в поле:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_S \frac{\sigma dS}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_l \frac{\tau dl}{R}. \quad (19.31')$$

В формуле (19.31') ρ , σ и τ есть функции радиуса R . Практически формулой (19.31) пользуются сравнительно редко, так как распределение σ по поверхности, τ по длине и ρ по объему зависит от конфигурации электродов и, как правило, перед проведением расчета неизвестно. Поэтому интегрирование произвести затруднительно, так как обычно неизвестно, какова зависимость ρ , σ и τ от радиуса R .

При использовании формулы (19.31') предполагается, что потенциал на бесконечности равен нулю и что заряды, создающие поле, распределены в ограниченной (не бесконечно протяженной) области (иначе интеграл может оказаться расходящимся).

§ 19.20. Граничные условия. Под *граничными условиями* понимают условия, которым подчиняется поле на границах раздела сред с разными электрическими свойствами.

При изучении раздела «Переходные процессы» большое значение имел вопрос о начальных условиях и законах коммутации, которые позволяли определить постоянные интегрирования при решении задач классическим методом. В классическом методе они использовались в явном виде, в операторном — в скрытом. Без использования их нельзя решить ни одной задачи на переходные процессы.

Можно провести параллель между ролью граничных условий в электрическом (или в любом другом) поле и ролью начальных условий и законов коммутации при переходных процессах.

При интегрировании уравнения Лапласа (или Пуассона) в решение входят постоянные интегрирования. Их определяют, исходя из граничных условий. Прежде чем перейти к подробному обсуждению граничных условий, рассмотрим вопрос о поле внутри проводящего тела в условиях электростатики.

§ 19.21. Поле внутри проводящего тела в условиях электростатики.

В проводящем теле, находящемся в электростатическом поле, вследствие явления электростатической индукции происходит разделение зарядов. Отрицательные заряды смещаются на поверхность тела, обращенную в сторону более высокого потенциала, положительные — в противоположную сторону (рис. 19.9).

Все точки тела будут иметь одинаковый потенциал. Если между какими-либо точками возникла бы разность потенциалов, то под ее действием появилось бы упорядоченное движение зарядов, что противоречит понятию электростатического поля.

Поверхность тела эквипотенциальна. Вектор напряженности внешнего поля в любой точке поверхности подходит к ней под прямым углом. *Внутри проводящего тела напряженность поля равна нулю*, так как внешнее поле компенсируется полем зарядов, расположившихся на поверхности тела.



Рис. 19.9

§ 19.22. Условия на границе раздела проводящего тела и диэлектрика. На границе проводящее тело — диэлектрик при отсутствии тока по проводящему телу выполняются два условия:

1) отсутствует тангенциальная (касательная к поверхности) составляющая напряженности поля:

$$E_t = 0; \quad (19.32)$$

2) вектор электрического смещения $\vec{D}$ в любой точке диэлектрика, непосредственно примыкающей к поверхности проводящего тела, численно равен плотности заряда σ на поверхности проводящего тела в этой точке:

$$D = \sigma. \quad (19.33)$$

Рассмотрим первое условие. Все точки поверхности проводящего тела имеют один и тот же потенциал. Следовательно, между двумя любыми весьма близко расположенными друг к другу точками поверхности приращение потенциала $d\varphi = 0$, но $d\varphi = E_t dl$, следовательно, $E_t dl = 0$.

Так как элемент пути dl между точками на поверхности не равен нулю, то равно нулю E_t .

Для доказательства второго условия мысленно выделим бесконечно малый параллелепипед (рис. 19.10). Верхняя грань его параллельна поверхности проводящего тела и расположена в диэлектрике. Нижняя грань находится в проводящем теле. Высоту параллелепипеда возьмем весьма малой (сплющим его). Применим к параллелепипеду теорему Гаусса. В силу малости линейных размеров можно принять, что плотность заряда σ во всех точках на поверхности dS проводящего

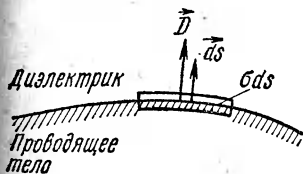


Рис. 19.10

тела, попавшей внутрь параллелепипеда, одна и та же. Полный заряд внутри рассматриваемого объема равен σdS .

Поток вектора $\vec{D}$ через верхнюю грань объема $\vec{D} d\vec{S} = D dS$. Потока вектора $\vec{D}$ через боковые грани объема ввиду малости последнего и того, что вектор $\vec{D}$ скользит по ним, нет. Через «дно» объема поток также отсутствует, так как внутри проводящего тела $E = 0$ и $D = 0$ (ϵ_a проводящего тела есть величина конечная). Таким образом, поток вектора $\vec{D}$ из объема равен $D dS = \sigma dS$ или $D = \sigma$.

§ 19.23. Условия на границе раздела двух диэлектриков. На границе раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями выполняются два следующих условия:

1) равны тангенциальные составляющие напряженности поля:

$$E_{1t} = E_{2t}; \quad (19.34)$$

2) равны нормальные составляющие электрической индукции:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (19.35)$$

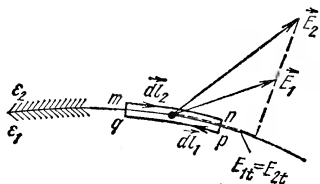


Рис. 19.11

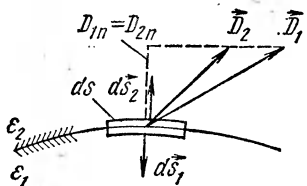


Рис. 19.12

Индекс 1 относится к первому диэлектрику, индекс 2 — ко второму.

Первое условие вытекает из того, что в потенциальном поле $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ по любому замкнутому контуру. Второе условие представляет собой следствие теоремы Гаусса.

Докажем справедливость первого условия. С этой целью выделим плоский замкнутый контур $mnpqm$ (рис. 19.11) и составим вдоль него циркуляцию вектора напряженности электрического поля. Верхняя сторона контура расположена в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 , нижняя — в диэлектрике с ϵ_1 . Длину стороны mn , равную длине стороны pq , обозначим dl . Контур возьмем так, что размеры np и qm будут бесконечно малы по сравнению с dl . Поэтому составляющими интеграла $\oint \vec{E}_1 d\vec{l}$ вдоль вертикальных сторон в силу их малости пренебрежем. Составляющая $\oint \vec{E} d\vec{l}$ на пути mn равна $\vec{E}_2 d\vec{l}_2 = E_2 dl$, по пути pq равна $\vec{E}_1 d\vec{l}_1 = -E_1 dl$. Знак «минус» появился потому, что элемент длины на пути pq и касательная составляющая вектора $\vec{E}_1$ направлены в противоположные стороны ($\cos 180^\circ = -1$).

Таким образом, $\oint \vec{E} d\vec{l} = E_2 dl - E_1 dl = 0$ или $E_{1t} = E_{2t}$.

Убедимся в справедливости второго условия. С этой целью на границе раздела двух сред выделим очень малых размеров параллелепипед (рис. 19.12). Внутри выделенного объема есть связанные заряды

и нет свободных (случай наличия свободных зарядов на границе раздела рассмотрим отдельно), поэтому $\oint \vec{D} \, d\vec{S} = 0$.

Поток вектора $\vec{D}$:

через верхнюю грань площадью dS : $\vec{D}_2 \, d\vec{S}_2 = D_{2n} \, dS_2$;

через нижнюю грань: $\vec{D}_1 \, d\vec{S}_1 = D_1 \, dS_1 \cos 180^\circ = -D_{1n} \, dS$; $|d\vec{S}_1| = |d\vec{S}_2| = dS$.

Следовательно,

$$\oint \vec{D} \, d\vec{S} = -D_{1n} \, dS + D_{2n} \, dS = 0 \text{ или } D_{1n} = D_{2n}.$$

При наличии на границе раздела двух сред свободных зарядов с плотностью σ (это встречается весьма редко)

$$\oint \vec{D} \, d\vec{S} = D_{2n} \, dS - D_{1n} \, dS = \sigma \, dS,$$

при этом

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (19.36)$$

т. е. при наличии на границе раздела двух сред свободных зарядов нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ скачком изменяется на величину плотности свободных зарядов на границе раздела.

Из § 19.3 известно, что потенциалу придается смысл работы при переносе единичного заряда. При переходе через границу, отделяющую один диэлектрик от другого, — например при переходе от точки n к точке p на рис. 19.11 — нормальная составляющая напряженности является величиной конечной, а длина пути *np* стремится к нулю. Произведение их равно нулю. Поэтому при переходе через границу раздела двух диэлектриков потенциал не претерпевает скачков.

§ 19.24. Теорема единственности решения. Электрическое поле описывается уравнением Лапласа или Пуассона. Оба они являются уравнениями в частных производных. Уравнения в частных производных в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений имеют в общем случае множество линейно независимых друг от друга решений. В любой же конкретной практической задаче есть единственная картина поля, т. е. единственное решение. Из множества линейно независимых решений, допускаемых уравнением Лапласа — Пуассона, выбор единственного, удовлетворяющего конкретной задаче, производят с помощью граничных условий.

Если есть некоторая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа — Пуассона и граничным условиям в данном поле, то эта функция и представляет собой то единственное решение конкретной задачи, которое ищут.

Это положение называют теоремой единственности решения. Докажем ее. Допустим, что есть два решения (φ' и φ'' , $\vec{E}'$ и $\vec{E}''$). На поверхности каждого k -го проводящего тела с зарядом q_k потенциал $\varphi'_k = \varphi''_k$. Во всех точках разностное поле ($\varphi = \varphi' - \varphi''$ и $\vec{E} = \vec{E}' - \vec{E}''$)

отсутствует, так как его энергия $\int \frac{1}{2} \epsilon_a E^2 dV = \frac{1}{2} \sum \varphi_k q_k = 0$ [§ 19.43;

на поверхности проводника $\varphi_k = \varphi'_k - \varphi''_k = 0$].

§ 19.25. Общая характеристика задач электростатики и методов их решения. В зависимости от того, что задано и что определяют, задачи электростатики можно подразделить на три типа.

Задача первого типа. По заданному закону распределения потенциала в пространстве $\varphi(x, y, z)$ найти распределение свободных зарядов, вызвавших поле. Такого рода задачи можно решать с помощью уравнения Пуассона. Это наиболее простой тип задач; — $\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}$ в данной точке поля согласно уравнению Пуассона равняется сумме частных производных второго порядка от φ , в которую подставляют координаты данной точки поля. Одна из задач первого типа рассмотрена в примере 193.

Близкой к задачам первого типа является задача, в которой известно выражение для потенциала φ как функции координат и требуется найти распределение поверхностных или линейных зарядов, создающих поле, когда объемные заряды в поле отсутствуют. Если заряды расположены на поверхностях проводящих тел, то в соответствии с формулой (19.33) плотность заряда $\sigma = \epsilon_a E_n$, где $E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Индекс n означает направление, нормальное к поверхности тела.

Задача второго типа. Задан закон распределения свободных зарядов в пространстве в функции координат $\rho_{\text{своб}}(x, y, z)$. Найти закон изменения потенциала в пространстве $\varphi(x, y, z)$. Эта задача является обратной по отношению к первой и значительно сложнее ее. Принципиально задача состоит в решении уравнения Пуассона относительно φ , т. е. в решении дифференциального уравнения второго порядка в частных производных. Задачи второго типа рассмотрены в примерах 188—189.

Задачи первого и второго типов практически встречаются редко, чаще имеют дело с задачами третьего типа.

Задача третьего типа. Известны потенциалы (или полные заряды) и геометрия тел, создающих поле. Требуется найти закон изменения E или φ во всех точках поля. Несколько задач третьего типа рассмотрено в § 19.37 — 19.40 и в примерах 1816, 187, 194.

Если среда, в которой создано поле, является неоднородной, то ее подразделяют на однородные области и решение уравнения Лапласа производят для каждой области отдельно. Основная трудность задачи состоит в том, что хотя полные заряды тел и известны, но плотность распределения зарядов на отдельных участках заряженного тела неизвестна. Решения уравнения Лапласа для отдельных областей должны быть согласованы друг с другом: на границе раздела двух сред с различными ϵ_a должны выполняться граничные условия. На границе раздела проводящего тела и диэлектрика также должны выполняться свои граничные условия.

Задачи третьего типа можно решать аналитически или графически, либо путем моделирования.

В настоящем параграфе приведена лишь краткая характеристика этих методов (путей решения). Более обстоятельное изложение их дано в дальнейшем на конкретных примерах.

В простых случаях задачи на аналитический расчет полей решают путем использования теоремы Гаусса в интегральной форме (см. § 19.13). В более сложных аналитическое решение задач третьей группы производят, используя уравнение Лапласа.

Аналитические методы решения задач третьей группы могут быть подразделены на две подгруппы. В первой из них производят интегрирование уравнения Лапласа без использования вспомогательных (искусственных) приемов. Во второй используют искусственный прием — метод зеркальных изображений*.

По методу зеркальных изображений решение производят путем введения вспомогательного заряда или зарядов, которые в расчетном отношении заменяют связанные заряды, выявившиеся на границах тел или сред в результате их поляризации или в результате электростатической индукции (см. § 19.30 — 19.33).

В тех случаях, когда потенциал ϕ является функцией только одной координаты выбранной системы координат, уравнение Лапласа из уравнения в частных производных переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое интегрируется без затруднений (см. примеры 186—187).

Если же потенциал ϕ является функцией двух или трех координат, то, для того чтобы проинтегрировать уравнение Лапласа, применяют метод Фурье, позволяющий перейти от уравнения в частных производных к эквивалентной ему совокупности двух или соответственно трех обыкновенных дифференциальных уравнений (см. § 19.39).

Графический метод анализа и расчета задач третьей группы представляет собой метод, в котором по определенным правилам производят построение семейств силовых и эквипотенциальных линий, используя некоторые заранее известные свойства исследуемого поля. Эти правила практически одни и те же для всех неизменных во времени полей, т. е. для электростатического поля, электрического поля постоянного тока в проводящей среде (см. гл. 20) и для магнитного поля постоянного тока (см. гл. 21).

В основу анализа и расчета электростатических полей методом моделирования положена аналогия между электростатическим полем и электрическим полем постоянного тока в проводящей среде. Метод моделирования основан на сопоставлении задачи электростатики и сходной задачи на электрическое поле постоянного тока в проводящей среде, в которой совокупность силовых и эквипотенциальных линий практически такая же. Это дает возможность воспользоваться результатами экспериментального исследования поля в проводящей среде при решении родственной электростатической задачи. Подробно об этом говорится в § 24.7 — 24.9. Следует заметить, что при расчетах полей широко применяют метод наложения.

* См. также метод конформных преобразований в приложении И.

В заключение отметим, что в задачах электростатики расчет можно производить с целью определения либо «точечной» характеристики поля (напряженности или потенциала в заданной точке), либо интегральной характеристики данного поля, например емкости или разности потенциалов.

В приложениях Е', Ж, З, И к ч. III рассмотрены основные положения ряда аналитических методов расчета полей, которые рекомендуется изучить студентам специальностей ТВН, электронной техники, электрических машин и аппаратов.

Перейдем к рассмотрению некоторых простейших электростатических задач.

§ 19.26. Поле заряженной оси. Под *заряженной осью* понимают весьма тонкий теоретический бесконечно длинный металлический проводник (тонкая проволока). Заряд на единицу длины ее принято обозначать через τ . Диэлектрическая проницаемость среды, окружающей ось, равна ϵ_a . Для нахождения напряженности поля в некоторой точке, удаленной на расстояние r от оси (рис. 19.13), проведем через эту точку цилиндрическую поверхность так, что ось цилиндрической поверхности совпадет с заряженной осью.

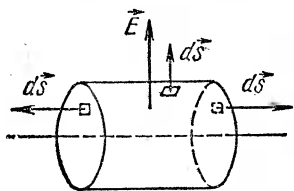


Рис. 19.13

Используем теорему Гаусса, которая применима к замкнутой поверхности. В рассматриваемом случае последняя образована боковой поверхностью цилиндра и двумя его доньшками. Поток вектора $\vec{E}$ имеется только через боковую поверхность цилиндра. Через доньшки поток вектора $\vec{E}$ отсутствует, так как элемент поверхности $d\vec{S}$ каждого доньшка перпендикулярен $\vec{E}$.

Элементы $d\vec{S}$ боковой поверхности и напряженность электрического поля $\vec{E}$ в любой точке цилиндрической поверхности по направлению совпадают, поэтому

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\tau}{\epsilon_a} \text{ или } E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}. \quad (19.37)$$

Напряженность в поле заряженной оси изменяется обратно пропорционально расстоянию r точки от оси.

Потенциал

$$\begin{aligned} \varphi &= - \int E dr = - \int \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r} dr = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln r + C = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r} + C. \end{aligned} \quad (19.38)$$

изменяется по логарифмическому закону *.

* Единича, находящаяся под знаком логарифма в (19.38), имеет смысл единичного радиуса (единицы измерения), поэтому логарифм берется от величины с нулевой размерностью.

§ 19.27. Поле двух параллельных заряженных осей. Пусть одна ось на единицу длины имеет заряд $+\tau$, другая — заряд $-\tau$. Возьмем в поле некоторую произвольную точку M (рис. 19.14). Результирующая напряженность поля в ней $\vec{E}_M$ равна геометрической сумме напряженностей от обоих зарядов. Расстояние точки M до положительно заряженной оси обозначим через a , до отрицательно заряженной оси — через b . Потенциал есть функция скалярная. Потенциал точки M равен сумме потенциалов от каждой оси:

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{a} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{b} + C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b}{a} + C. \quad (19.39)$$

Уравнением эквипотенциали в поле двух заряженных осей является выражение $b/a = \text{const}$.

Эквипотенциаль представляет собой совокупность точек, отношение расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная.

В геометрии известна теорема Аполлония. Согласно теореме Аполлония, геометрическим местом точек, отношение расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная, является окружность. Поэтому эквипотенциаль в поле двух заряженных осей есть окружность. Рассмотрим, как ее можно построить. Соединим точку M с осями. Проведем биссектрисы внутреннего (aMb) и внешнего (pMa) углов.

Точки 1 и 2 пересечения биссектрис с линией, проведенной через заряженные оси, и точка M будут тремя точками искомой окружности.

Для нахождения положения центра окружности (точки O) разделим пополам расстояние между точками 1 и 2.

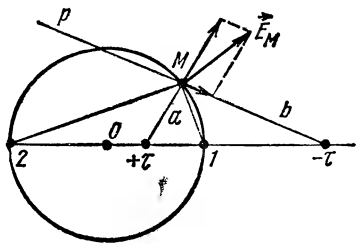


Рис. 19.14

§ 19.28. Поле двухпроводной линии. Расстояние между осями двух проводов линии (рис. 19.15, а) обозначим через d , радиус каждого провода — через r . Если левому проводу будет сообщен, например, заряд $+\tau$ на единицу длины, а правому заряд $-\tau$, то в пространстве между проводами возникнет электрическое поле. Заряды проводов распределятся по поверхности с неодинаковой плотностью.

Поверхность каждого провода в отдельности является эквипотенциалью. Внутри проводов $E = 0$. Задача о поле двухпроводной линии сводится к рассмотренной задаче о поле двух заряженных осей. (Картину поля двух заряженных осей см. на рис. 19.3, а). Расположим две заряженные оси так, чтобы поверхности каждого провода являлись эквипотенциальными.

Точки O_1 и O_2 означают геометрические оси проводов. Пусть заряженные оси будут расположены в точках m и n . Из условия симметрии они на одинаковое расстояние x удалены от геометрических осей.

Запишем условие равенства потенциалов точек 1 и 2 левого провода. Отношение b/a для точки 1 есть $\frac{d-r-x}{r-x}$; отношение b/a для точки 2 равно $\frac{d+r-x}{r+x}$.

Из равенства $\frac{d-r-x}{r-x} = \frac{d+r-x}{r+x}$ получим

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - r^2}. \quad (19.40)$$

В последнем выражении знак «минус» перед радикалом соответствует положению точки n , знак «плюс» — точке m .

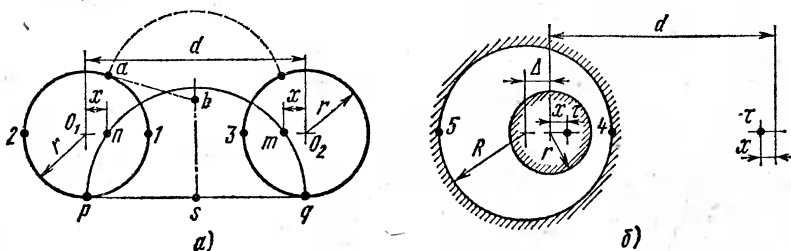


Рис. 19.15

Положение заряженных осей (часто их называют *электрическими осями* проводов) вместо подсчетов по формуле (19.40) находят путем следующих графических построений.

Проводят общую касательную к проводам (прямая pq на рис. 19.15, а), делят расстояние между точками касания пополам (точка s) и проводят окружность радиусом rs . Точки пересечения (m и n) окружности с линией O_1O_2 дают положения электрических осей, т. е. таких осей, на которых надо было бы мысленно сосредоточить заряды проводов, чтобы поверхности проводов являлись эквипотенциалами. Так как поле от двух заряженных осей вне проводов удовлетворяет уравнению Лапласа и в то же время удовлетворены граничные условия (поверхность каждого провода является эквипотенциалом, на ней $E_t = 0$), то на основании теоремы единственности полученное решение истинно.

Нетрудно убедиться в том, что если $d \gg r$, то x становится много меньше r . При этом электрические и геометрические оси практически совпадают.

Для построения силовой линии (дуги окружности), выходящей из произвольной точки a на поверхности левого провода (рис. 19.15, а), надо найти положение центра этой окружности (точки b). Точка b находится на пересечении касательной к поверхности левого провода в точке a с перпендикуляром к линии центров O_1O_2 в ее середине (построения показаны пунктиром).

Рассмотренную методику определения положения электрических осей можно применить и в том случае, когда заданы два цилиндрических электрода *неравных*

радиусов, следы поверхности которых совпадают с какими-либо двумя эквипотенциальными линиями на рис. 19.3, а.

Например, поле в пространстве между двумя цилиндрическими электродами, один из которых находится внутри другого [см. рис. 19.15, б (заданы радиусы r , R и смещение между осями Δ)], найдем как поле от двух заряженных осей с зарядами $+\tau$ и $-\tau$. Положение осей определено значениями x и d . Для подсчета значений x и d следует воспользоваться уравнением (19.40) и уравнением, выражающим равенство потенциалов точек 4 и 5 окружности радиусом R .

§ 19.29. Емкость. Если два каких-либо проводящих тела разделены диэлектриком и несут на себе равные по величине и противоположные по знаку заряды Q , то в пространстве между ними создается электрическое поле. Пусть разность потенциалов между телами, обусловленная этими зарядами, равна U .

Под *емкостью C между двумя телами*, на которых имеются равные и противоположные по знаку заряды, понимают абсолютную величину отношения заряда на одном из тел к напряжению между телами:

$$C = Q/U. \quad (19.41)$$

Из определения емкости следует единица ее размерности $1 \frac{\text{кулон}}{\text{вольт}} = 1 \text{ фарада (Ф)}$. Это очень крупная единица и потому на практике пользуются более мелкими кратными ей единицами: микрофарадой (мкФ) и пикофарадой (пФ); $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$, $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$.

Устройства, предназначенные для получения определенной величины емкости, называют *конденсаторами*. Однако не следует думать, что емкостью обладают только специально созданные для ее получения устройства. Можно говорить о емкости двух любых проводящих тел, разделенных диэлектриком.

В литературе также можно встретить термин *емкость уединенного тела*. Под ней понимают отношение заряда на этом теле к его потенциалу, полагая, что второе тело удалено в бесконечность и что потенциал его равен нулю. В приведенном определении емкости между двумя проводящими телами и емкости уединенного тела имеется в виду, что если в электростатическом поле есть и другие проводящие тела, то они не заряжены; в противном случае заряды этих тел влияли бы на величину разности потенциалов U между рассматриваемыми телами (на величину потенциала тела).

Так как напряжение между двумя телами в электростатическом поле может быть линейно выражено через заряд Q (исключение составляют только устройства, в которых используются сегнетодиэлектрики — вещества, у которых ϵ является функцией E), то отношение Q/U оказывается не зависящим ни от величины Q , ни от величины U .

Емкость зависит только от конфигурации тел, их размеров, расстояния между телами, электрических свойств диэлектрика (величины ϵ).

Рассмотрим определение *емкости двухпроводной линии*. Выразим напряжение между двумя проводами через заряд τ на единицу длины. Точка 1 (см. рис. 19.15, а) принадлежит поверхности левого провода, точка 3 — поверхности правого провода. Разность потенциалов между ними

$$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{d-r-x}{r-x} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r-x}{d-r-x}.$$

При $d \gg r$ и $x \ll r$, поэтому

$$U_{13} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \cdot 2 \cdot \ln \frac{d}{r} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_a} \ln \frac{d}{r}. \quad (19.42)$$

Следовательно, емкость единицы длины линии при условии $d \gg r$:

$$C = \frac{\tau}{U_{13}} = \frac{\pi\epsilon_a}{\ln \frac{d}{r}}. \quad (19.43)$$

Она, действительно, зависит только от геометрических размеров и свойств среды и не зависит от величины заряда τ и величины напряжения U_{13} . Если расстояние между двумя проводами увеличивать, то емкость будет уменьшаться.

§ 19.30. Метод зеркальных изображений. Для расчета электростатических полей, ограниченных какой-либо проводящей поверхностью правильной формы или в которых есть геометрически правильной формы граница между двумя диэлектриками, широко применяют метод зеркальных изображений.

Это искусственный прием расчета, в котором кроме заданных зарядов вводят еще дополнительные заряды, величины и местоположение которых выбирают так, чтобы удовлетворить граничным условиям в поле. Территориально заряды помещают там, где находятся зеркальные (в геометрическом смысле) отображения заданных зарядов. Метод зеркальных изображений применяют не только для расчета электростатических полей, но и для расчета электрических полей в проводящей среде и магнитных полей. Обоснованием метода и правильности даваемого им решения является теорема единственности.

Рассмотрим два примера на метод зеркальных изображений.

§ 19.31. Поле заряженной оси, расположенной вблизи проводящей плоскости. Заряженная ось (τ — заряд на единицу длины) расположена в диэлектрике параллельно поверхности проводящей среды (рис. 19.16, а). Проводящей средой может быть какая-либо металлическая стенка или, например, земля. Требуется определить характер поля в верхней полуплоскости (диэлектрике).

В результате электростатической индукции на поверхности проводящего тела выступают заряды. Плотность их меняется с изменением координаты x . Поле в диэлектрике создается не только заряженной осью, но и зарядами, выступившими на поверхности проводящего тела вследствие электростатической индукции. Несмотря на то, что распределение плотности зарядов на поверхности проводящей среды неизвестно, данную задачу сравнительно легко можно решить по методу зеркальных изображений.

Поместим в точке m фиктивный заряд обратного знака ($-\tau$) по отношению к заданному заряду τ . Расстояние h от точки m до плоскости раздела сред такое же, как и расстояние от действительного заряда до плоскости раздела. В этом смысле осуществлено зеркальное изображение. В данной задаче фиктивный заряд численно равен заданному, но имеет обратный знак. Так будет не всегда, т. е. не во

всех задачах искусственно введенный заряд будет численно равен заданному и иметь противоположный знак.

Убедимся, что напряженность поля от двух зарядов (τ и $-\tau$) в любой точке границы раздела имеет только нормальную к границе составляющую и не имеет тангенциальной составляющей (см. построения на рис. 19.16, а). Действительно, тангенциальные составляющие от обоих зарядов имеют противоположные направления и в сумме дают нуль в любой точке поверхности.

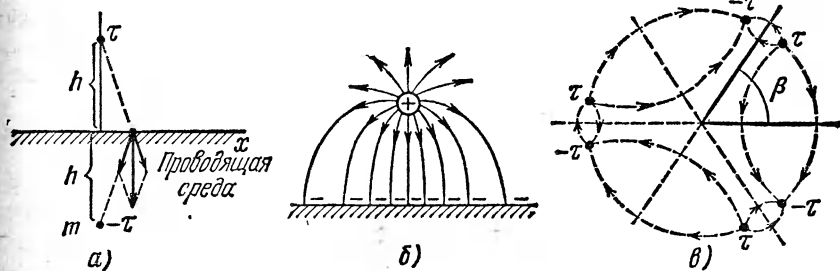


Рис. 19.16

Можно убедиться в том, что потенциал от каждой из осей, определяемый формулой (19.38), удовлетворяет уравнению Лапласа [формуле (19.30)]. Для того чтобы проверить это, следует подставить правую часть формулы (19.38) в формулу (19.30) и убедиться в том, что $\nabla^2\varphi$ будет равно нулю:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r} \right) \right] = 0.$$

Так как потенциал от каждой из осей удовлетворяет уравнению Лапласа и в то же время удовлетворено граничное условие, то на основании теоремы единственности полученное решение является истинным.

Картина поля заряженной оси, расположенной параллельно проводящей плоскости, изображена на рис. 19.16, б. Силовые линии перпендикулярны поверхности провода и поверхности проводящей плоскости. Знаки «минус» на поверхности проводящей плоскости означают отрицательные заряды, выявившиеся на ее поверхности в результате электростатической индукции.

Многократные зеркальные отражения. Если заряд τ находится в диэлектрике внутри двугранного угла $\beta = \pi/n$ (n — целое число), а границами угла являются проводящие стенки (на рис. 19.16, в $n = 3$), то поле внутри двугранного угла определится как поле от $2n$ знакопеременных зарядов $\pm\tau$, расположенных зеркально по отношению друг к другу. На каждой стороне двугранного угла тангенциальная составляющая напряженности поля равна нулю.

§ 19.32. Поле заряженной оси, расположенной вблизи плоской границы раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями. Как показано на рис. 19.17, а, верхнее полупространство заполнено диэлектриком с диэлектрической проницае-

мостью ϵ_{1a} , нижнее — диэлектриком с ϵ_{2a} ; ab — граница раздела двух сред. В верхнем полупространстве параллельно границе раздела сред находится заряженная ось с зарядом τ_1 . Вследствие поляризации диэлектриков на границе раздела выйдут связанные заряды, влияющие на поле в обеих средах. Учет влияния связанных зарядов на поле производят путем введения двух дополнительных фиктивных зарядов τ_2 и τ_3 в отличие от предыдущей задачи, где вводился один заряд. В предыдущей задаче надо было удовлетворить только одному условию ($E_t = 0$), и это можно было сделать с помощью одного заряда. В данной же задаче надо удовлетворить двум граничным условиям, что возможно только с помощью двух пока неизвестных зарядов τ_2 и τ_3 .

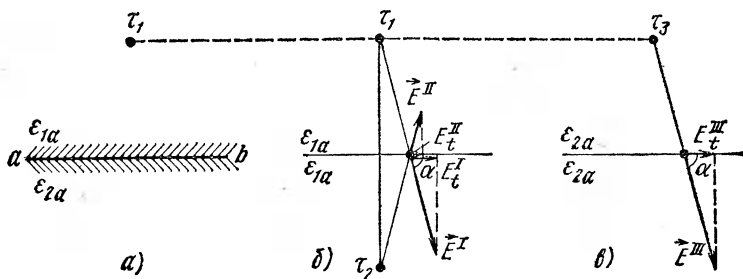


Рис. 19.17

Расчет поля в любой точке *верхнего* полупространства (полуплоскости) производят от двух зарядов: заданного τ_1 и дополнительного τ_2 . Причем не только верхнее, но и нижнее полупространство заполнено (в расчетном смысле) диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_{1a} (рис. 19.17, б).

Поле в любой точке *нижнего* полупространства определяют как поле от некоторого дополнительного заряда τ_3 , расположенного в той же точке, где находился заряд τ_1 . В этом случае не только нижнее, но и верхнее полупространство заполняется диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_{2a} (рис. 19.17, в).

Составим два уравнения для определения пока неизвестных τ_2 и τ_3 .

Из условия равенства тангенциальных составляющих напряженности поля на границе раздела следует, что $E_t^I + E_t^{II} = E_t^{III}$ или

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_{1a}r} [\tau_1 + \tau_2] \cos \alpha = \frac{1}{2\pi\epsilon_{2a}r} \tau_3 \cos \alpha.$$

Отсюда

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau_3 \frac{\epsilon_{1a}}{\epsilon_{2a}}. \quad (19.44)$$

Из условия равенства нормальных составляющих вектора D на границе раздела, приняв за положительное направление для нормали направление вниз, имеем $D_n^I - D_n^{II} = D_n^{III}$.

Запишем последнюю строку в развернутом виде:

$$\frac{1}{2\pi r} (\tau_1 - \tau_2) \sin \alpha = \frac{1}{2\pi r} \tau_3 \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$\tau_1 - \tau_2 = \tau_3. \quad (19.45)$$

Решая совместно (19.44) и (19.45), получим

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon_{1a} - \varepsilon_{2a}}{\varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}} \tau_1 \quad (19.46)$$

и

$$\tau_3 = \frac{2\varepsilon_{2a}}{\varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}} \tau_1. \quad (19.47)$$

Знак заряда τ_2 совпадает со знаком заряда τ_1 , если $\varepsilon_{1a} > \varepsilon_{2a}$. Знак τ_3 всегда тот же, что и знак τ_1 .

Если поле будет создаваться не заряженной осью, а точечным зарядом, то вся методика сохраняется и формулы (19.46) и (19.47) годятся и для точечных зарядов. Но под τ теперь следует понимать величину точечного заряда.

§ 19.33. Электростатическое поле системы заряженных тел, расположенных вблизи проводящей плоскости. В качестве системы заряженных тел рассмотрим многопроводную линию из n весьма длинных проводов с зарядом τ_k на единицу длины (индекс у заряда соответствует номеру провода), протянутых параллельно проводящей поверхности (например, поверхности земли). Высота подвеса и радиус каждого провода известны, а также известна электрическая проницаемость ε_a среды, окружающей провода.

Возьмем в диэлектрике некоторую произвольную точку M (рис. 19.18) и найдем ее потенциал. Потенциал точки M будет равен сумме потенциалов, создаваемых каждым проводом и его зеркальным изображением. Составляющую потенциала точки M от провода 1 и его зеркального изображения в соответствии с формулой (19.39) можно записать следующим образом (постоянную, с точностью до которой определяется потенциал, опускаем):

$$\varphi_{M1} = \tau_1 \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}},$$

где b_{1M} — расстояние точки M до зеркального изображения первого провода; a_{1M} — расстояние точки M до первого провода.

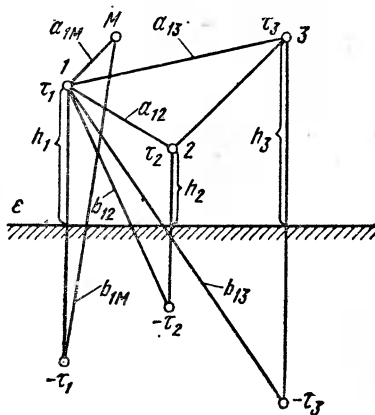


Рис. 19.18

Будем полагать, что высота подвеса каждого провода над землей много больше радиусов проводов. При этом электрические оси практически совпадут с геометрическими.

Составляющая потенциала точки M от второго провода и его зеркального изображения:

$$\varphi_{M2} = \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi_M &= \varphi_{M1} + \varphi_{M2} + \varphi_{M3} + \dots = \\ &= \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}} + \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}} + \tau_3 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{3M}}{a_{3M}} + \dots \end{aligned}$$

§ 19.34. Потенциальные коэффициенты. Первая группа формул Максвелла. Точку M можно поместить на поверхность первого провода. При этом $\varphi_M = \varphi_1$; $b_{M1} = 2h_1$; $a_{M1} = r_1$; $b_{M2} = b_{12}$ — расстояние первого провода до зеркального изображения второго провода; $a_{M2} = a_{12}$ — расстояние первого провода до второго и т. д.:

$$\varphi_1 = \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_1}{r_1} + \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} + \tau_3 \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{13}}{a_{13}} + \dots \quad (19.48')$$

Коэффициенты при зарядах τ_1 , τ_2 и других зависят только от геометрических размеров тел, взаимного их расположения и от свойств среды. Они не зависят ни от величины, ни от знаков зарядов и потенциалов.

Для сокращения записи выражение (19.48') и другие, аналогичные ему, запишем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \tau_1 \alpha_{11} + \tau_2 \alpha_{12} + \tau_3 \alpha_{13} + \dots \\ \varphi_2 &= \tau_1 \alpha_{21} + \tau_2 \alpha_{22} + \tau_3 \alpha_{23} + \dots \\ \varphi_3 &= \tau_1 \alpha_{31} + \tau_2 \alpha_{32} + \tau_3 \alpha_{33} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (19.48)$$

Здесь

$$\alpha_{km} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{km}}{a_{km}}, \quad \alpha_{kk} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_k}{r_k}. \quad (19.48'')$$

Коэффициент $\alpha_{mk} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{mk}}{a_{mk}}$. Так как $b_{mk} = b_{km}$ и $a_{mk} = a_{km}$, то $\alpha_{km} = \alpha_{mk}$. Систему уравнений (19.48) принято называть *первой группой формул Максвелла* (ее не следует смешивать с первым уравнением Максвелла, о котором идет речь в § 22.2).

Коэффициенты α называются *потенциальными коэффициентами*. Размерность их равна размерности единицы длины, разделенной на фараду.

Так как у всех коэффициентов α под знаком логарифма находится дробь, числитель которой всегда больше знаменателя, то все коэффициенты α положительны.

Коэффициентам α может быть дано следующее толкование. Пусть заряды всех проводов, кроме первого, равны нулю: $\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = 0$.

$= \dots = 0$, а $\tau_1 = 1$; тогда $\varphi_1 = \alpha_{11}$, т. е. α_{11} численно равно потенциалу первого провода, если на первом проводе находится единичный заряд, а заряды на остальных проводах отсутствуют. Аналогично, α_{21} численно равно потенциалу второго провода в тех же условиях. Система (19.48) позволяет подсчитать потенциалы заряженных тел по известным общим зарядам тел.

Может встретиться и обратная задача: по известным потенциалам тел найти заряды тел.

§ 19.35. Емкостные коэффициенты. Вторая группа формул Максвелла. Решим систему (19.48) относительно зарядов, полагая потенциалы φ и коэффициенты α известными:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 + \dots \\ \tau_2 &= \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 + \dots \\ \tau_3 &= \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (19.49)$$

Коэффициенты $\beta_{kn} = \Delta_{kn}/\Delta$. Здесь через Δ обозначен] определитель системы (19.48):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots \end{vmatrix}$$

Алгебраическое дополнение Δ_{kn} получают из определителя системы Δ путем вычеркивания k -строки и n -столбца и умножения полученного минора на $(-1)^{k+n}$.

Система (19.49) является *второй группой формул Максвелла*.

Коэффициенты β называются *емкостными коэффициентами*. Размерность их обратна размерности коэффициента α . Так как определитель системы Δ симметричен относительно главной диагонали, то $\Delta_{kn} = \Delta_{nk}$ и потому $\beta_{kn} = \beta_{nk}$. Все β с одинаковыми индексами положительны, а с разными индексами отрицательны.

Убедимся, например, в том, что β_{11} положительно, а β_{21} и β_{31} отрицательны. С этой целью все провода, кроме первого, соединим тонкими (чтобы не исказить поля) проводниками с землей. Потенциал земли примем равным нулю. При этом из (19.49) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \beta_{11}\varphi_1, \\ \tau_2 &= \beta_{21}\varphi_1, \\ \tau_3 &= \beta_{31}\varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (19.49')$$

Придадим первому проводу положительный по отношению к земле потенциал, соединив его с землей, например через батарею (рис. 19.19, а). Заряд первого провода положителен и потенциал первого провода положителен ($\varphi_1 > 0$; $\tau_1 > 0$). Отрицательный заряд рассчитается по земле и по всем телам, с ней электрически соединенными.

Все провода, кроме первого, поскольку они электрически соединены с землей, приобретут отрицательные заряды:

$$\varphi_2 = 0, \quad \tau_2 < 0;$$

$$\varphi_3 = 0, \quad \tau_3 < 0.$$

Из системы (19.49') следует, что

$$\beta_{11} = \frac{\tau_1}{\varphi_1} > 0, \text{ а } \beta_{21} = \frac{\tau_2}{\varphi_1} < 0 \text{ и } \beta_{31} = \frac{\tau_3}{\varphi_1} < 0.$$

Отсюда вытекает методика определения опытным путем коэффициентов β_{11} и β_{21} .

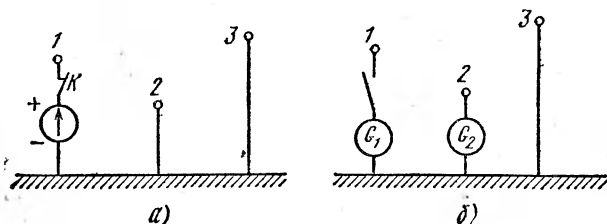


Рис. 19.19

Если после зарядки провода 1 (ключ K на рис. 19.19, а включен) до известного потенциала φ_1 ключ K разомкнуть, убрать батарею, включить гальванометры G_1 и G_2 (рис. 19.19, б), а затем замкнуть ключ K , то система разрядится; G_1 измерит заряд τ_1 , а G_2 — заряд τ_2 провода 2 и т. д. Далее находим $\beta_{11} = \tau_1/\varphi_1$ и $\beta_{21} = \tau_2/\varphi_1$.

§ 19.36. Частичные емкости. Третья группа формул Максвелла. Систему (19.49) принято записывать и в иной форме, так чтобы в правой части каждой строчки были не потенциалы, а разности потенциалов между данным телом и всеми остальными, в том числе и землей.

В соответствии с (19.49) заряд k -тела:

$$\tau_k = \beta_{kk}\varphi_k + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km}\varphi_m.$$

Слагаемое $\beta_{km}\varphi_m = \beta_{km}(\varphi_m - \varphi_k + \varphi_k) = -\beta_{km}U_{km} + \beta_{km}\varphi_k$. Поэтому

$$\tau_k = \varphi_k \beta_{kk} + \varphi_k \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km} U_{km} = \varphi_k \sum_{m=1}^{m=n} \beta_{km} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} (-\beta_{km}) U_{km}.$$

Обозначим:

$$C_{kk} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \dots + \beta_{kk} + \dots + \beta_{kn} = \sum_{m=1}^{m=n} \beta_{km} \quad (19.50)$$

и

$$C_{km} = -\beta_{km}. \quad (19.51)$$

Тогда

$$\tau_k = \varphi_k C_{kk} + U_{k1} C_{k1} + U_{k2} C_{k2} + \dots = \varphi_k C_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} U_{km} C_{km}. \quad (19.52)$$

Если придать k значения 1, 2, 3, ..., то получим

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \varphi_1 C_{11} + U_{12} C_{12} + U_{13} C_{13} + \dots \\ \tau_2 &= \varphi_2 C_{22} + U_{21} C_{21} + U_{23} C_{23} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (19.53)$$

Система (19.53) является *третьей группой формул Максвелла*. Коэффициенты C_{kk} называют *собственными частичными емкостями*, а коэффициенты C_{km} — *взаимными частичными емкостями*. (Часто слова «собственная» и «взаимная» опускают.)

Так как $\beta_{km} = \beta_{mk}$, то и $C_{km} = C_{mk}$.

Размерность частичных емкостей та же, что и размерность емкостных коэффициентов β . Все частичные емкости положительны. Так как $C_{km} = -\beta_{km}$, а $\beta_{km} < 0$, то очевидно, что $C_{km} > 0$. Чтобы убедиться, что C_{kk} положительно, проведем следующий опыт: соединим тонкими проводниками все провода с k -проводом. При этом все $U_{km} = 0$, и из (19.52) следует, что $\tau_k = \varphi_k C_{kk}$.

Если k -проводу сообщить положительный по отношению к земле потенциал (потенциал земли принят равным нулю), соединив его с плюсом батареи, минус которой соединен с землей, то τ_k и φ_k будут положительными и $C_{kk} = \frac{\tau_k}{\varphi_k} > 0$.

Емкость C_{kk} оказывается положительной, несмотря на то что в состав ее [см. формулу (19.50)] может входить большое число отрицательных коэффициентов β_{km} (коэффициент $\beta_{kk} > \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km}$). Сог-

ласно (19.53), полный заряд k -тела равен сумме зарядов. Заряд $\varphi_k C_{kk}$ обусловлен разностью потенциалов между k -телом и землей; $U_{km} C_{km}$ — есть заряд, обусловленный разностью потенциалов между k - и m -телами. Поэтому частичной емкости C_{km} между k - и m -телами можно дать следующее толкование: C_{km} — есть отношение составляющей заряда k -тела, обусловленной разностью потенциалов U_{km} между k - и m -телами, к величине этой разности потенциалов.

Для более наглядной иллюстрации системы (19.53) можно представить, что в системе трех проводов (рис. 19.20) первый провод как бы соединен с обкладками трех конденсаторов C_{11} , C_{12} и C_{13} . Заряды на обкладках этих конденсаторов, обращенных к проводу 1, соответственно равны $\varphi_1 C_{11}$; $U_{12} C_{12}$; $U_{13} C_{13}$. Заряды на других обкладках записаны на рис. 19.20.

Три группы формул Максвелла справедливы для системы заряженных тел любой формы. Однако, если тела имеют произвольную форму,

то потенциальные коэффициенты уже нельзя определять по формулам (19.48"), справедливым только для системы линейных параллельных достаточно длинных проводов.

Определение емкостных коэффициентов и частичных емкостей в этом случае производят опытным путем.

Частичные емкости используют при расчетах не только электростатических полей, но и при расчетах быстро протекающих процессов в электрических цепях, а также процессов в электрических цепях, в основу которых положено использование частичных емкостей, на-

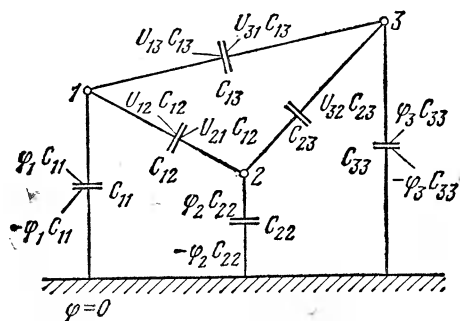


Рис. 19.20

пример при емкостном отборе мощности от высоковольтной линии электропередачи. Частичные емкости между электродами электронных ламп, между электродами транзисторов учитывают при расчетах быстро протекающих процессов (см., например, гл. 9).

§ 19.37. Поле точечного заряда, расположенного вблизи проводящей сферы. Рассмотрим три родственные задачи на изображение в сфере.

а. В диэлектрике с известной ϵ_a на расстоянии b от центра проводящего предварительно (до заземления) не заряженного шара радиуса a (см. рис. 19.21, а) поместим точечный заряд q . Внутри шара поле известно ($\varphi = 0$ и $E = 0$). Определим

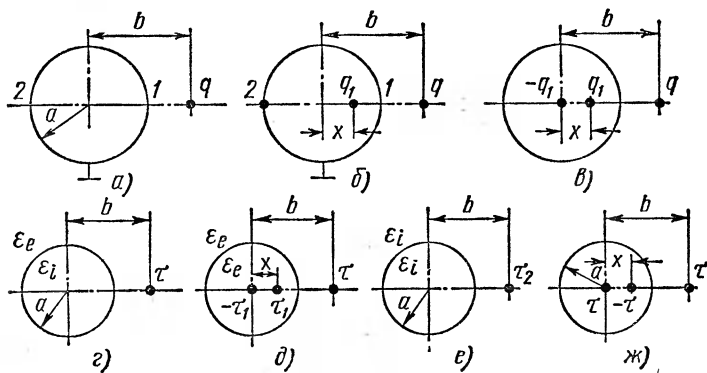


Рис. 19.21

поле в пространстве вне шара. С этой целью на расстоянии x от центра шара поместим заряд q_1 (рис. 19.21, б), составим выражения для потенциалов точек 1 и 2 шара и приравняем их нулю (шар заземлен):

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_a(a-x)} + \frac{q}{4\pi\epsilon_a(b-a)} = 0, \quad \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_a(a+x)} + \frac{q}{4\pi\epsilon_a(b+a)} = 0.$$

Откуда $x = a^2/b$ и $q_1 = -q \frac{a}{b}$.

б. Если точечный заряд q поместить вблизи незаряженного незаземленного шара радиуса a , то поле вне шара определим как поле от трех зарядов (рис. 19.21, в):

заданного заряда q , заряда зеркального изображения $q_1 = -q \frac{a}{b}$, расположенного на расстоянии $x = a^2/b$ от центра шара, и заряда $-q_1 = q \frac{a}{b}$, помещенного в центре шара. При этом суммарный заряд шара равен нулю, а $\Phi_{\text{шара}} = \frac{q \frac{a}{b}}{4\pi\epsilon_a a} + C = \frac{q}{4\pi\epsilon_a b} + C$.

в. Если точечный заряд q поместить вблизи незаземленного шара с зарядом Q , то поле вне шара определится как поле от трех зарядов: q , $q_1 = -q \frac{a}{b}$ и $q_2 = Q + q \frac{a}{b}$. Заряд q_1 помещен на расстоянии x от центра шара, а q_2 — в центре шара.

§ 19.38. Поле заряженной оси, расположенной параллельно цилиндру. Рассмотрим две родственные задачи на изображение в диэлектрическом и проводящем цилиндрах.

а. В диэлектрике с электрической проницаемостью ϵ_e находится цилиндр, проницаемость которого ϵ_i . Параллельно ему на расстоянии b от оси цилиндра расположена ось с зарядом τ на единицу длины (рис. 19.21, з). Поле вне цилиндра определяем по рис. 19.21, д. И цилиндр и окружающее его пространство заполнены средой с ϵ_e . Поле создается тремя зарядами: заданным τ , зеркальным зарядом $\tau_1 = -\tau \frac{\epsilon_e - \epsilon_i}{\epsilon_e + \epsilon_i}$, расположенным на расстоянии $x = a^2/b$ от оси цилиндра, и зарядом $-\tau_1$, помещенным на оси цилиндра. Поле внутри цилиндра определим по рис. 19.21, е как поле, создаваемое зарядом $\tau_2 = \tau \frac{2\epsilon_i}{\epsilon_i + \epsilon_e}$, когда и цилиндр и окружающее его пространство заполнены средой с проницаемостью ϵ_i .

б. Если цилиндр проводящий и не заряжен, то предельным переходом, устремив $\epsilon_i \rightarrow \infty$, найдем $\tau_1 = -\tau$. Поле вне цилиндра создается тремя зарядами, изображенными на рис. 19.21, ж.

§ 19.39. Шар в равномерном поле. Если в равномерное поле (направлено сверху вниз; вдоль оси — z), напряженность которого равна E_0 (см. рис. 19.22), внести металлический или диэлектрический шар (ϵ шара отлично от ϵ окружающей среды), то электрическое поле, особенно вблизи шара, исказится, перестанет быть равномерным. Характер искажения поля зависит от размеров шара, его ϵ и от величины заряда на шаре.

Если шар металлический (проводящий), то силовые линии должны подходить к его поверхности под прямым углом. Если металлический шар не заряжен, то на нем вследствие явления электростатической индукции произойдет разделение зарядов. Силовые линии будут заканчиваться или начинаться на них.

Металлический шар может быть и заряжен, т. е. нести на себе избыточный заряд, который также расположится на поверхности.

Если шар из диэлектрика, то под влиянием внешнего по отношению к нему поля шар поляризуется. Заряды, выявившиеся на шаре вследствие поляризации, исказят прежде (до внесения шара) равномерное

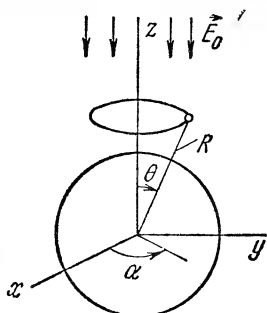


Рис. 19.22

поле. Силовые линии будут подходить к поверхности шара так, что будут выполняться два граничных условия (см. § 19.23).

Если шар металлический, то внутри шара $E = 0$ и $\varphi = \text{const}$. Независимо от того, металлический шар или диэлектрический, во внешней по отношению к шару области нет свободных зарядов и потому поле в наружной по отношению к шару области описывается уравнением Лапласа. Если шар из диэлектрика и свободный заряд на нем равен нулю, то поле внутри шара описывается также уравнением Лапласа.

Таким образом, для решения той и другой задачи необходимо проинтегрировать уравнение Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$. Это одна из наиболее типичных классических задач электростатики. Для любой конкретной задачи необходим правильный выбор системы координат (первый этап решения). Система координат должна быть выбрана таким образом, чтобы граничные поверхности в поле описывались наиболее удобно. В данной задаче граничная поверхность — сфера, которая наиболее удобно описывается в сферической системе координат. Поэтому будем пользоваться этой системой.

Вторым этапом решения является выяснение вопроса о том, не обладает ли изучаемое поле тем или иным видом симметрии. Условия симметрии поля часто в значительной мере облегчают решение задачи. В рассматриваемой задаче поле не зависит от координаты α . Чтобы убедиться в этом, мысленно рассежем поле плоскостью, перпендикулярной оси z декартовой системы, и проведем в этой плоскости окружность так, чтобы центр ее лежал на оси z . Все точки этой окружности имеют одно и то же значение радиуса R , соединяющего точку на этой окружности с началом координат. Кроме того, угол θ в меридианной плоскости между радиусом R и осью z один и тот же.

Все точки окружности находятся в поле в одинаковых условиях. Поэтому потенциал их один и тот же. Но значение угла α , характеризующего положения точек этой окружности, различно. Если для совокупности точек, обладающих $R = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ и разными значениями угла α , φ одно и то же, то это означает, что в данном поле φ не зависит от угла α . Поэтому поле будет описываться уравнением [см. уравнение (19.31)]:

$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (19.54)$$

(составляющая $\frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}$ выпала, так как φ не зависит от α). Выражение (19.54) представляет собой уравнение в частных производных. Для интегрирования уравнений в частных производных применяют метод Фурье, согласно которому, искомую функцию (в данном случае φ) полагают в виде произведения двух пока неизвестных функций M и N , одна из которых (M) зависит только от R , а другая (N) — только от θ :

$$\varphi = M(R) N(\theta) = MN. \quad (19.55)$$

Вид функций M и N подлежит определению. Определение функции φ в виде произведения двух функций (19.55) позволяет разбить

уравнение в частных производных (19.54) на два обыкновенных дифференциальных уравнения, из которых одно будет составлено относительно M , другое — относительно N .

Подставим (19.55) в (19.54), учтя, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = N \frac{\partial M}{\partial R}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = M \frac{\partial N}{\partial \theta}.$$

Поэтому

$$\frac{N}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial M}{\partial R} \right) + \frac{M}{R^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (19.56)$$

Умножим (19.56) на $\frac{R^2}{MN}$:

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial M}{\partial R} \right) + \frac{1}{N \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (19.57)$$

Особенностью уравнения (19.57) является то, что первое слагаемое в нем представляет собой функцию только R , а второе слагаемое — функцию только θ . Сумма двух функций, из которых одна зависит только от R , а другая — только от θ , равна нулю для бесчисленного множества пар значений R и θ [уравнение (19.57) годится для всех точек поля]. Это возможно тогда, когда каждая из данных функций равна нулю:

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial M}{\partial R} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{N \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (19.57')$$

либо когда

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial M}{\partial R} \right) = p \quad \text{и} \quad \frac{1}{N \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) = -p. \quad (19.57'')$$

Здесь p есть некоторое число, пока не известное.

Таким образом, задача свелась к интегрированию уравнений (19.57') и (19.57''). Общее решение для φ согласно (19.55) равно произведению решений уравнений (19.57') плюс произведение решений для M и N по уравнениям (19.57''). Найдем решение уравнений (19.57'). Так как в (19.57') M зависит только от R , а N — только от θ , то от частных производных можно перейти к простым (обыкновенным):

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dM}{dR} \right) = 0; \quad \frac{1}{N \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dN}{d\theta} \right) = 0.$$

Интеграл первого из них:

$$M = \frac{A_1}{R} + A_2. \quad (19.58)$$

Найдем интеграл второго уравнения:

$$\sin \theta \frac{dN}{d\theta} = A_3; \quad \frac{dN}{d\theta} = \frac{A_3}{\sin \theta} \quad \text{или} \quad N = A_3 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + A_4. \quad (19.59)$$

Покажем, что A_3 непременно должно равняться нулю, так как только в этом случае в решении отсутствует слагаемое $A_3 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$.

Потенциал есть функция непрерывная и на конечном отрезке он не может измениться на бесконечно большую величину. Из физических соображений ясно, что потенциал точек оси z вблизи шара не может быть равен бесконечности. Между тем, если бы $A_3 \neq 0$, то в решении для потенциала присутствовало бы слагаемое $A_3 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$, равное $-\infty$ для всех точек, у которых $\theta = 0$ ($\operatorname{tg} \theta = 0$; $\ln \operatorname{tg} \theta = -\infty$).

Таким образом, частное решение для φ , вытекающее из (19.57'), следующее:

$$\varphi = \frac{C_1}{R} + C_2 \quad (C_1 = A_1 A_4; \quad C_2 = A_2 A_4). \quad (19.60)$$

Найдем решение уравнений (19.57''):

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dM}{dR} \right) = p$$

или

$$2R \frac{dM}{dR} + R^2 \frac{d^2 M}{dR^2} = pM.$$

Применим подстановку Эйлера $M = CR^n$:

$$\frac{dM}{dR} = nCR^{n-1}; \quad \frac{d^2 M}{dR^2} = n(n-1)CR^{n-2}.$$

Подставим производные в уравнение

$$2RnCR^{n-1} + R^2(n-1)nCR^{n-2} = pCR^n$$

или

$$n^2 + n - p = 0.$$

Определим корни квадратного уравнения:

$$n_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + p}. \quad (19.61)$$

Значение p определим при интегрировании второго уравнения (19.57''):

$$\frac{1}{N \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dN}{d\theta} \right) = -p.$$

Решение его можно записать в виде $N = B \cos \theta$. Убедимся в этом путем подстановки и одновременно найдем значение p :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\theta} &= -B \sin \theta; \quad \sin \theta \frac{dN}{d\theta} = -B \sin^2 \theta; \\ \frac{1}{N \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dN}{d\theta} \right) &= \frac{-2B \sin \theta \cos \theta}{B \cos \theta \sin \theta} = -2 = -p. \end{aligned}$$

Следовательно, $p = 2$.

После нахождения числа p подставим его в (19.61) и найдем: $n_1 = 1$ и $n_2 = -2$. Таким образом, совместное решение уравнений (19.57") дает следующее выражение для φ :

$$\varphi = \left(C_3 R + \frac{C_4}{R^2} \right) \cos \theta.$$

Полное решение:

$$\varphi = \frac{C_1}{R} + C_2 + \left(C_3 R + \frac{C_4}{R^2} \right) \cos \theta. \quad (19.62)$$

В (19.62) присутствуют четыре неизвестных постоянных: C_1 , C_2 , C_3 и C_4 . Значения постоянных зависят от того, какой шар (проводящий или диэлектрический) внесен в поле *.

§ 19.40. Проводящий шар в равномерном поле. Для определения четырех постоянных необходимо учесть не только условие на поверхности шара, но и условия на большем удалении от шара, теоретически на бесконечно большом удалении от шара, или, как принято говорить, условия на бесконечности.

Совокупность весьма удаленных от шара точек в условном смысле рассматривается при этом как бесконечность. Если шар не заряжен, то все точки плоскости xy , проходящей через центр шара, имеют один и тот же потенциал. Обозначим его φ_0 .

При удалении от шара на большое расстояние $z = R \cos \theta$, по сравнению с которым радиус шара a весьма мал, возмущающее действие шара на поле либо вовсе не проявится (если суммарный заряд шара будет равен нулю), либо проявится как возмущение от точечного заряда (если шар будет иметь на себе суммарный свободный заряд Q). Потенциал φ на бесконечности определим так:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R} + \varphi_0 + E_0 R \cos \theta. \quad (19.63)$$

Первое слагаемое правой части (19.63) дает составляющую потенциала от заряда шара Q , слагаемое $E_0 R \cos \theta$ учитывает прирост потенциала от напряженности равномерного поля E_0 на пути $z = R \cos \theta$. Так как решение (19.62) годится и для точек поля, весьма далеко (бесконечно далеко) удаленных от шара, то можно сопоставить выражения (19.62) и (19.63). Они должны давать один и тот же результат. Это будет только в том случае, когда соответствующие слагаемые в обоих выражениях равны. Из сопоставления следует, что $C_2 = \varphi_0$; $C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a}$; $C_3 = E_0$.

Сопоставление на бесконечности не дает возможности найти величину C_4 , так как в (19.63) нет слагаемого, изменяющегося обратно пропорционально второй степени R . Для нахождения C_4 воспользу-

* Задачи теории поля, в которых приходится решать уравнение в частных производных и из большого числа выбирать решения, удовлетворяющие граничным условиям, в математических работах принято называть *краевыми задачами*.

емся тем, что в условиях электростатики все точки поверхности шара имеют один и тот же потенциал. Это условие равносильно тому, что тангенциальная составляющая напряженности поля на поверхности шара равна нулю. При $R = a$

$$\varphi = \text{const} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a a} + \left(E_0 a + \frac{C_4}{a^2}\right) \cos \theta + \varphi_0.$$

Правая часть будет постоянной с изменением θ только при условии, что $\left(E_0 a + \frac{C_4}{a^2}\right) = 0$. Отсюда $C_4 = -E_0 a^3$.

Таким образом, для всех точек диэлектрика

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R} + \varphi_0 + E_0 \left(R - \frac{a^3}{R^2}\right) \cos \theta. \quad (19.64)$$

Так как потенциал зависит только от R и θ , напряженность электрического поля имеет только две составляющих (см. § 19.8):

$$\left. \begin{aligned} E_R &= -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R^2} - E_0 \left(1 + \frac{2a^3}{R^3}\right) \cos \theta; \\ E_\theta &= -\frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} = E_0 \left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (19.64')$$

Если $Q = 0$, то на поверхности шара (при $R = a$) $E_R = -3E_0 \cos \theta$.

При $\theta = 0$ напряженность $E_R = -3E_0$; при $\theta = 180^\circ$ $E_R = 3E_0$, т. е. в этих точках напряженность поля стала в три раза больше напряженности равномерного поля E_0 , в которое был внесен шар. На «экваторе» при $\theta = 90^\circ$ напряженность, напротив, стала равной нулю.

Таким образом, капелька воды, попав в бак трансформатора с масляным заполнением, вызовет значительное местное увеличение напряженности поля.

§ 19.41. Диэлектрический шар в равномерном поле. Если в равномерное поле помещен незаряженный *диэлектрический шар*, то как внутри шара, так и вне его нет свободных зарядов и потому поле описывается уравнением Лапласа. Полное решение (19.62) пригодно и для данной задачи. Величины, служащие для описания поля внутри шара, обозначим с индексом i , а величины, с помощью которых записывается потенциал во внешней по отношению к шару области, — с индексом e . Таким образом, для внутренней области

$$\varphi_i = \frac{C_{1i}}{R} + C_{2i} + \left(C_{3i}R + \frac{C_{4i}}{R^2}\right) \cos \theta, \quad (19.65)$$

для внешней области

$$\varphi_e = \frac{C_{1e}}{R} + C_{2e} + \left(C_{3e}R + \frac{C_{4e}}{R^2}\right) \cos \theta. \quad (19.66)$$

Надо найти 8 постоянных интегрирования. Потенциал на бесконечности в этом случае $\varphi = \varphi_0 + E_0 R \cos \theta$.

Сопоставим последнее выражение с (19.66): $C_{2e} = \varphi_0$ и $C_{3e} = E_0$.

В § 19.14 было рассмотрено поле точечного заряда. Там было показано, что потенциал в поле точечного заряда изменяется обратно пропорционально R . Поэтому C_{1e}/R — есть составляющая потенциала от суммарного заряда шара, рассматриваемого как точечный заряд. Так как суммарный заряд шара равен нулю, то в выражении для φ_e эта составляющая должна выпасть, т. е. $C_{1e} = 0$.

Следовательно,

$$\varphi_e = \varphi_0 + \left(E_0 R + \frac{C_{4e}}{R^2} \right) \cos \theta. \quad (19.66')$$

В выражении (19.66) осталась неизвестной лишь постоянная C_{4e} .

Рассмотрим выражение потенциала φ_i для внутренней области. Оно должно давать конечное значение для всех точек внутри шара. Это возможно только тогда, когда $C_{1i} = 0$ и $C_{4i} = 0$ (если бы $C_{1i} \neq 0$, то слагаемое C_{1i}/R в центре шара при $R = 0$ давало бы бесконечно большое значение). Постоянная C_{2i} , с точностью до которой определяется потенциал в рассматриваемом поле, равна аналогичной постоянной $C_{2e} = \varphi_0$ для внешней области.

Таким образом, для внутренней области

$$\varphi_i = \varphi_0 + C_{3i} R \cos \theta. \quad (19.65')$$

Оставшиеся неизвестными постоянные C_{4e} и C_{3i} найдем из граничных условий.

Из равенства потенциалов φ_i и φ_e при $R = a$ (это условие, как нетрудно убедиться, эквивалентно условию $E_{1t} = E_{2t}$) следует, что $C_{3i}a = E_0a + \frac{C_{4e}}{a^2}$.

Из равенства нормальных составляющих вектора $\vec{D}$ на границе следует, что

$$-\varepsilon_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial R} \right)_{R=a} = -\varepsilon_e \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial R} \right)_{R=a},$$

т. е.

$$\varepsilon_i C_{3i} = \varepsilon_e \left(E_0 - \frac{2C_{4e}}{a^3} \right).$$

Совместное решение двух последних уравнений дает:

$$C_{3i} = E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}, \quad C_{4i} = a^3 E_0 \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}.$$

Потенциал внутренней области:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_0 + E_0 R \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} \cos \theta = \varphi_0 + E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} z; \\ z &= R \cos \theta. \end{aligned} \quad (19.67)$$

Потенциал внешней области:

$$\varphi_e = \varphi_0 + E_0 \left(R + \frac{a^3}{R^2} \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} \right) \cos \theta. \quad (19.68)$$

Напряженность поля внутри шара:

$$E_z = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = -E_0 \frac{3\epsilon_e}{2\epsilon_e + \epsilon_i}. \quad (19.69)$$

Напряженность $\vec{E}$ направлена вдоль оси — z и не зависит от координат точки. Это означает, что поле внутри шара однородное.

На рис. 19.23 изображены линии вектора $\vec{D}$ и эквипотенциальные линии (картина поля) для трех случаев:

а) когда в равномерное (до внесения шара) поле помещен незаряженный проводящий шар (рис. 19.23, а);

б) когда в равномерное (до внесения шара) поле помещен диэлектрический шар, ϵ_i которого больше ϵ_e окружающей среды (рис. 19.23, б);

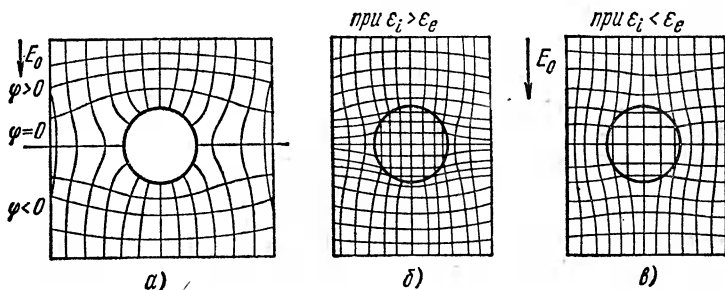


Рис. 19.23

в) когда ϵ_i диэлектрического шара меньше ϵ_e окружающей среды (рис. 19.23, в).

Как известно из § 19.15, линии вектора $\vec{D}$ начинаются на свободных зарядах. Эти линии прерываются на поверхности металлического шара (см. рис. 19.23, а) и проходят, не прерываясь, через диэлектрический шар (см. рис. 19.23, б и в).

Если на рис. 19.23, б и в вместо линий вектора $\vec{D}$ изобразить линии вектора напряженности поля $\vec{E}$, то линии $\vec{E}$ частично претерпевали бы разрыв на поверхности шаров, так как истоком для $\vec{E}$ являются не только свободные, но и связанные заряды [см. формулу (19.21')].

§ 19.42. Диэлектрический цилиндр в равномерном поле. Аналогично формулам § 19.41 выводятся формулы, позволяющие определить потенциал и напряженность равномерного поля, возмущенного внесением в него диэлектрического цилиндра (ось цилиндра перпендикулярна $\vec{E}_0$).

Пусть напряженность $\vec{E}_0$ равномерного (до внесения цилиндра) поля направлена параллельно оси x декартовой системы (рис. 19.24, а). Поместим в это поле диэлектрический цилиндр так, чтобы ось цилиндра совпала с осью z .

Решая уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат, получим следующие формулы для определения потенциала внутри цилиндра (φ_i) и вне цилиндра (φ_e):

$$\begin{aligned}\varphi_i &= -\frac{2\varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} E_0 r \cos \alpha = \\ &= -\frac{2\varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} E_0 x; \quad (19.70)\end{aligned}$$

$$\varphi_e = E_0 \left(\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} \cdot \frac{a^2}{r} - r \right) \cos \alpha. \quad (19.71)$$

Напряженность равномерного поля внутри цилиндра, направленная по оси x ,

$$E_i = -\frac{d\varphi_i}{dx} = \frac{2\varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} E_0. \quad (19.72)$$

В заключение отметим, что если в равномерное поле напряженностью E_0 внести *проводящий цилиндр* радиусом a , расположив его так, что продольная ось его будет перпендикулярна E , то потенциал в области вне цилиндра $\varphi_e = E_0 \left(\frac{a^2}{r} - r \right) \cos \alpha$.

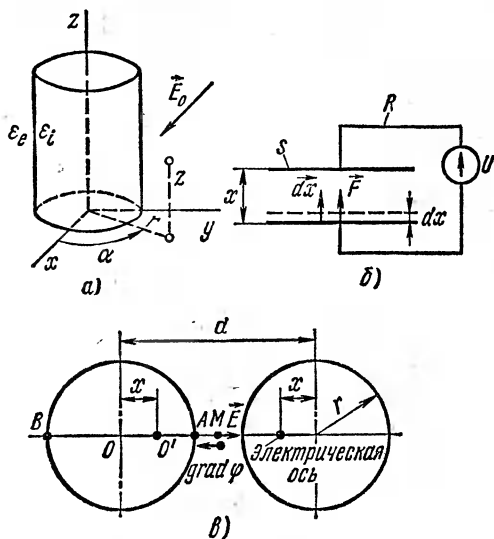


Рис. 19.24

§ 19.43. Понятие о плоскопараллельном, плоскомеридианном и равномерном полях. В литературе можно встретить термины «плоскопараллельное поле», «плоскомеридианное поле» и «равномерное поле»*.

Под *плоскопараллельным полем* понимают поле, картина которого (т. е. совокупность силовых и эквипотенциальных линий) повторяется во всех плоскостях, перпендикулярных какой-либо одной оси декартовой системы координат, т. е. в плоскопараллельном поле картина поля не зависит от какой-либо одной координаты декартовой системы.

В качестве примера плоскопараллельного поля можно назвать поле двухпроводной линии (двух параллельных проводов). Если ось z декартовой системы направить вдоль оси одного из проводов, то потенциал φ не будет зависеть от координаты z .

* Физики и математики в термин «поле» вкладывают свое («профессиональное») содержание. Когда говорят о поле в физическом смысле (электромагнитном, гравитационном, тепловом, поле ядерных сил), то под ним понимают вид материи. Когда о поле говорится в математическом смысле, то имеется в виду поле величины, которой оно описывается. С чисто математической точки зрения поля могут быть векторные и скалярные, вихревые и безвихревые, плоскопараллельные, плоскомеридианные и др.

Под *плоскомеридианным полем* понимают поле, картина которого повторяется во всех меридианных плоскостях, т. е. картина поля не зависит от координаты α цилиндрической или сферической системы координат. В литературе встречается еще определение плоскомеридианного поля как поля, образованного телами вращения с общей осью.

В качестве примера плоскомеридианного поля можно назвать поле, образованное внесением металлического шара в равномерное до внесения шара поле (см. рис. 19.23), или поле диполя, о котором идет речь в примере 197. В обоих случаях потенциал зависит только от радиуса R и угла θ сферической системы координат, но не зависит от угла α .

Частным случаем плоскомеридианного поля является поле, в котором потенциал зависит только от какой-либо одной координаты сферической или цилиндрической системы координат.

В *равномерном поле* напряженность одинакова во всех точках поля, т. е. величина ее не зависит от координат точки.

Равномерное поле образуется, например, между обкладками плоского конденсатора, если в пространстве между ними отсутствуют свободные заряды и если пренебречь искажающим влиянием краев конденсатора.

Следует иметь в виду, что большинство встречающихся на практике полей не обладает ни одним из перечисленных видов симметрии и потому не может быть отнесено ни к плоскопараллельному, ни к плоскомеридианному, ни к равномерному полям.

§ 19.44. Графическое построение картины плоскопараллельного поля. Аналитический расчет полей часто вызывает затруднения, например, когда поверхности электродов имеют сложную форму.

В этом случае картину поля строят графически. С этой целью сначала выясняют, не обладает ли изучаемое поле симметрией. Если она имеется, то картину поля строят только для одной из областей симметрии. Так, картина поля, образованного двумя проводящими взаимно

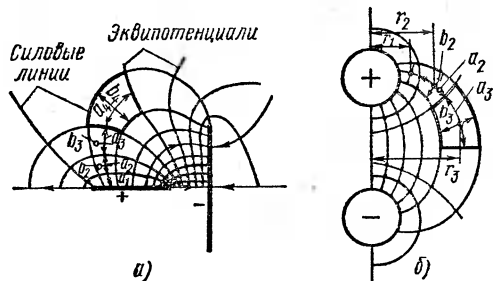


Рис. 19.25

перпендикулярными относительно тонкими пластинками (электродами), построена на рис. 19.25, а только для верхней полуплоскости (в нижней полуплоскости картина повторяется).

При построении руководствуются следующими правилами. 1. Силовые линии должны подходить к поверхностям электродов перпендикулярно. 2. Силовые и эквипотенциальные линии должны быть взаимно перпендикулярны и образовывать подобные ячейки поля (криволинейные прямоугольники), для которых отношение средней длины

ячейки a к средней ширине этой ячейки b для всех ячеек должно быть приблизительно одинаковым, т. е. $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \dots$.

Если число ячеек в силовой трубке обозначить n , а число трубок m (в примере $n = 8$, $m = 2 \times 10$), то при соблюдении перечисленных правил разность потенциалов между соседними эквипотенциалами будет одинакова и равна $\Delta U = U/n$, где U — напряжение между электродами, а поток ΔN вектора $\vec{D}$ в каждой силовой трубке будет такой же, что и в соседней. Обозначим длину электродов в направлении, перпендикулярном рисунку, через l . Тогда

$$\Delta N = b_1 l E_1 \epsilon_a = b_2 l E_2 \epsilon_a = \dots = b_n l E_n \epsilon_a.$$

Отсюда

$$E_1 = \frac{\Delta N}{b_1 l \epsilon_a}; \quad E_2 = \frac{\Delta N}{b_2 l \epsilon_a} \dots$$

Напряжение между электродами $U = E_1 a_1 + E_2 a_2 + \dots + E_n a_n$. Подставим в последнее выражение значения напряженностей поля $E_1 \div \div E_n$ и учтем, что по построению $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_n/b_n = a/b$. Получим $U = \frac{\Delta N a n}{\epsilon_a l b}$.

Поток в одной силовой трубке $\Delta N = \frac{U \epsilon_a l b}{a n}$.

Правая часть формулы для ΔN одинакова для всех силовых трубок, поэтому одинаковы и потоки вектора $\vec{D}$ во всех силовых трубках. Через все m силовых трубок поток вектора $\vec{D}$ будет в m раз больше и по теореме Гаусса он должен быть равен заряду Q на электроде $Q = m \Delta N = \frac{U \epsilon_a l b m}{a n}$.

Емкость между электродами $C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_a l b m}{a n}$.

§ 19.45. Графическое построение картины плоскомеридианного поля. В плоскомеридианном поле силовые линии также должны подходить к поверхностям электродов под прямым углом, а силовые и эквипотенциальные линии должны быть взаимно перпендикулярны. Однако в отличие от плоскопараллельного поля в образующихся при построении ячейках поля в меридианной плоскости отношение a_k к b_k не одинаково для всех ячеек, а зависит от расстояния r_k центра этой ячейки до оси вращения.

На рис. 19.25, б изображена часть картины поля между двумя шарами. Каждая силовая линия при вращении вокруг общей оси образует поверхность вращения, а каждая силовая трубка занимает пространство между смежными поверхностями вращения.

Обозначим a_k — длину ячейки вдоль силовой трубки; b_k — ширина ячейки; n — число ячеек вдоль силовой трубки; m — число силовых трубок. Запишем условие равенства потока вектора $\vec{D}$ через ячейки силовой трубки $\Delta N = 2\pi r_1 b_1 \epsilon_a E_1 = = 2\pi r_2 b_2 \epsilon_a E_2 = \dots$

Напряжение между электродами

$$U = E_1 a_1 + E_2 a_2 + \dots + E_n a_n = \frac{\Delta N}{2\pi \epsilon_a} \left(\frac{a_1}{b_1 r_1} + \frac{a_2}{b_2 r_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n r_n} \right).$$

Для того чтобы слагаемые в скобке по величине были одинаковы, при построении должно быть выдержано соотношение $\frac{a_{k-1}}{b_{k-1} r_{k-1}} = \frac{a_k}{b_k r_k}$, т. е. с увеличением

расстояния центра ячейки от оси вращения отношение a_k/b_k должно возрастать. Если это соотношение выдержано, то

$$U = \frac{\Delta N}{2\pi\epsilon_a} \cdot \frac{a_k n}{b_k r_k};$$

$$\Delta N = \frac{2\pi\epsilon_a U b_k r_k}{n a_k}.$$

Полный поток $N = m\Delta N = Q$, где Q — заряд на одном теле. Емкость между телами

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{N}{U} = \frac{m b_k}{n a_k} r_k 2\pi\epsilon_a.$$

§ 19.46. Объемная плотность энергии электрического поля и выражение механической силы в виде производной от энергии электрического поля по изменяющейся координате. Положим, что в некоторый момент времени напряжение на конденсаторе равно u . При увеличении напряжения на конденсаторе на величину du заряд на одной из пластин конденсатора увеличится на величину dQ , а на другой — на величину $-dQ$: $dQ = Cdu$, где C — емкость конденсатора.

Для переноса заряда dQ источник энергии должен совершить работу, равную $udQ = C u du$, которая затрачивается на создание электрического поля в конденсаторе.

Энергия, доставленная источником при заряде конденсатора от напряжения $u = 0$ до напряжения $u = U$ и перешедшая в энергию электрического поля конденсатора,

$$W_э = C \int_0^U u du = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Рассмотрим вопрос об объемной плотности энергии электрического поля. С этой целью возьмем плоский конденсатор и положим, что расстояние между пластинами его равно x , а площадь каждой пластины с одной стороны равна S . Диэлектрическая проницаемость среды между пластинами ϵ_a . Напряжение между пластинами U . Пренебрежем искажающим влиянием краев конденсатора на поле между пластинами. При этом условии поле можно считать равномерным. Напряженность электрического поля по модулю $E = U/x$.

Вектор электрической индукции по модулю $\vec{D} = \epsilon_a E = Q/S$. Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\epsilon_a S}{x}$. Для нахождения объемной плотности энергии электрического поля разделим энергию $W_э = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_a S U^2}{2x}$ на объем $V = Sx$, «занятый полем». Получим

$$\frac{W_э}{V} = \frac{\epsilon_a S U^2}{2Sx^2} = \frac{\epsilon_a E^2}{2} = \frac{ED}{2}.$$

Таким образом, объемная плотность энергии электрического поля равна $\frac{\epsilon_a E^2}{2}$. Если поле неравномерно, то напряженность будет изменяться при переходе от одной точки поля к соседней, но объемная плотность энергии поля будет по-прежнему равна $\frac{\epsilon_a E^2}{2}$, так как в пределах бесконечно малого объема поле можно считать равномерным.

Выделим в поле элементарный объем dV . Энергия в этом объеме равна $\frac{\epsilon_a E^2}{2} dV$.

Энергия, заключенная в объеме V любых размеров, равна $\int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV$.

В электрическом поле между заряженными телами действуют механические силы и их можно выразить в виде производной от энергии поля по изменяющейся координате. На рис. 19.24, б изображен плоский конденсатор, который присоединен к источнику напряжения U . В соответствии с предыдущим расстояние между пластинами назовем x , а площадь пластины — S . На каждую пластину конденсатора действует сила F . Под действием этих сил пластины конденсатора стремятся сближаться. Сила, действующая на нижнюю пластину, направлена вверх, на верхнюю пластину — вниз.

Положим, что под действием силы F нижняя пластина медленно, теоретически бесконечно медленно, переместилась вверх на расстояние dx и приняла положение, показанное пунктиром на рис. 19.24, б. Составим уравнение для баланса энергии при таком перемещении пластины. На основании закона сохранения энергии доставленная источником питания энергия $dW_{\text{и}}$ должна равняться сумме трех слагаемых:

1) работе силы F на расстоянии dx : $\vec{F}dx = Fdx$; 2) изменению энергии электрического поля конденсатора $dW_{\text{э}}$; 3) тепловым потерям от тока i , который протекает по проводам с сопротивлением R в течение времени от 0 до ∞ : $dW_{\text{и}} = Fdx + dW_{\text{э}} + \int_0^{\infty} Ri^2 dt$.

Так как по условию проведения эксперимента пластина конденсатора перемещается вверх теоретически бесконечно медленно, то изменение зарядов на пластинах также происходит весьма медленно, а следовательно, и проходящий через конденсатор ток смещения бесконечно мал. Другими словами, тепловыми потерями $\int_0^{\infty} Ri^2 dt$ в силу их малости в уравнении энергетического баланса можно пренебречь

и тогда $dW_{\text{и}} = Fdx + dW_{\text{э}}$. Отсюда сила $F = \frac{d(W_{\text{и}} - W_{\text{э}})}{dx}$.

Таким образом, силу F можно выразить в виде производной от разности энергий ($W_{\text{и}} - W_{\text{э}}$) по изменяющейся координате x .

В общем случае при перемещении пластины могут изменяться и напряжение между пластинами U и заряд Q .

Рассмотрим теперь два характерных частных случая перемещения пластины конденсатора. В первом конденсатор отсоединен от источника напряжения и перемещение пластины происходит при неизменных зарядах на пластинах. Во втором перемещение пластины происходит при неизменном напряжении между пластинами (конденсатор присоединен к источнику неизменного напряжения U).

Первый случай. Так как конденсатор отсоединен от источника энергии, то последний энергии не доставляет и потому $dW_{\text{и}} = 0$. При этом $F = -\frac{dW_{\text{э}}}{dx}$.

Таким образом, сила, действующая на пластину, равна взятой с обратным знаком производной от энергии электрического поля конденсатора по изменяющейся координате. Знак «минус» свидетельствует о том, что в рассматриваемом случае работа силы производится за счет убыли энергии в электрическом поле конденсатора.

Если учесть, что энергия электрического поля конденсатора $W_{\text{э}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_a S}$, то сила F по модулю

$$|F| = \frac{dW_{\text{э}}}{dx} = \frac{Q^2}{2\epsilon_a S} = \frac{\epsilon_a E^2 S}{2}.$$

Второй случай. Энергия, доставляемая источником питания при $U = \text{const}$, $dW_{\text{и}} = UdQ = U^2 dC$, где dC — приращение емкости, вызванное уменьшением расстояния между пластинами на величину dx .

Изменение энергии электрического поля конденсатора $dW_{\text{э}} = d\left(\frac{CU^2}{2}\right) = \frac{U^2}{2} dC$. Разность $dW_{\text{и}} - dW_{\text{э}} = U^2 dC - \frac{U^2}{2} dC = \frac{U^2}{2} dC = dW_{\text{э}}$.

Поэтому во втором случае $F = \frac{dW_a}{dx} = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx}$. Таким образом, и во втором случае сила равна производной от энергии электрического поля по изменяющейся координате.

$$\text{Емкость } C = \frac{\epsilon_a S}{x}, \text{ поэтому } \frac{dC}{dx} = -\frac{\epsilon_a S}{x^2}; F = \frac{1}{2} \epsilon_a S \left(\frac{U}{x}\right)^2 = \frac{\epsilon_a E^2 S}{2}.$$

Сила, действующая на пластину конденсатора во втором случае, равна силе, действующей на пластину конденсатора в первом случае. На единицу поверхности конденсатора действует сила $F/S = \frac{\epsilon_a E^2}{2}$.

Обратим внимание на то, что величина $\frac{\epsilon_a E^2}{2}$ выражает собой не только плотность энергии электрического поля, но и численно равна силе, действующей на единицу поверхности пластины конденсатора. Действующие на пластины конденсатора силы можно рассматривать как результат проявления сил продольного сжатия (вдоль силовых трубок) и сил бокового распора (поперек силовых трубок). Силы продольного сжатия стремятся укоротить силовую трубку, а силы бокового распора — расширить ее. На единицу боковой поверхности силовой трубки действует сила, численно равная $\frac{\epsilon_a E^2}{2}$. Эти силы проявляются не только в виде сил, действующих на пластины конденсатора, но также в виде сил на границе раздела двух диэлектриков. В этом случае на границе раздела действует сила, направленная в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

§ 19.47. Энергия поля системы заряженных тел. Энергия поля, образованного системой n заряженных тел, имеющих потенциалы $\phi_1 \dots \phi_n$ и заряды $q_1 \dots q_n$:

$$W_a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \phi_k. \quad (a)$$

Вывод формулы основан на том, что энергия поля равна работе внешних сил, затраченной на перенос зарядов из бесконечности (где $\phi = 0$) в точки поля, в которых они будут находиться, и на принципе наложения. Используя формулу (19.48), сначала находим работу при переносе заряда q_1 , полагая, что заряды всех остальных тел равны нулю. Затем находим работу при переносе заряда q_2 , полагая $q_1 = \text{const}$ и $q_3 = q_4 = q_n = 0$ и т. д. Суммируя все работы, получаем формулу (a).

Заметим, что заряды на проводящих телах, находящихся в диэлектрике, всегда распределяются по поверхностям этих тел так, что энергия образовавшегося между этими телами электрического поля минимальна (теорема Томсона).

Пример 181 а. Два провода диаметром 10 мм расположены в воздухе параллельно друг другу (рис. 19.24, в). Расстояние между осями проводов $d = 20$ мм. Заряд каждого провода на метр-длины 10^{-8} К. Левый провод несет положительный заряд, правый — отрицательный. Найти наибольшую и наименьшую плотности заряда на поверхности провода.

Решение. Находим положение электрических осей: $x = 1,35$ мм. Плотность заряда на поверхности металла $\sigma = D = \epsilon_a E$. Следовательно, σ будет больше там, где E больше.

Если учесть, что напряженность поля, создаваемая положительным зарядом, направлена от этого заряда, а напряженность поля, создаваемая отрицательным зарядом, направлена к заряду, то ясно, что наибольшая напряженность поля будет в точке A , наименьшая — в точке B . Напряженность поля в точке A равна сумме напряженностей от обоих зарядов, а в точке B — разности напряженностей:

$$E_A = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l (r-x)} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l (d-r-x)};$$

$$E_B = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \left(\frac{1}{r+x} - \frac{1}{d+r-x} \right) *.$$

Отсюда $D_A = \sigma_A = \epsilon_a E = 0,544 \text{ мкК/м}^2$, $D_B = \sigma_B = \epsilon_a E_B = 0,186 \text{ мкК/м}^2$.

Таким образом, плотность заряда в точке A в 2,92 раза больше, чем плотность заряда в точке B .

Пример 181 б. По условию предыдущей задачи найти градиент потенциала в точке M (расположенной посередине между проводами на линии, соединяющей их центры).

Решение. Так как $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, то модуль $\text{grad } \varphi$ равен модулю $\vec{E}$, а направление $\text{grad } \varphi$ противоположно направлению $\vec{E}$. В точке M

$$E_M = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \left(\frac{1}{\frac{d}{2}-x} + \frac{1}{\frac{d}{2}+x} \right) =$$

$$= \frac{10^{-8} \cdot 2}{2\pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 0,00865} =$$

$$= 41\,600 \text{ В/м}.$$

Направления $\vec{E}$ и $\text{grad } \varphi$ даны на рис. 19.24, в.

Пример 182. Определить частичные емкости на один метр длины двухпроводной линии. Геометрические размеры (в метрах) см. на рис. 19.26, а. Радиусы проводов 6 мм.

Решение. В соответствии с формулой (19.48):

$$\varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2; \quad \varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2.$$

Отсюда

$$\tau_1 = \frac{|\varphi_1 \alpha_{12}|}{\varphi_2 \alpha_{22}} = \varphi_1 \beta_{11} + \varphi_2 \beta_{12}.$$

Здесь

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\Delta}; \quad \beta_{12} = -\frac{\alpha_{12}}{\Delta}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

* Для воздуха $\epsilon_a = \epsilon_0$ ($\epsilon = 1$).

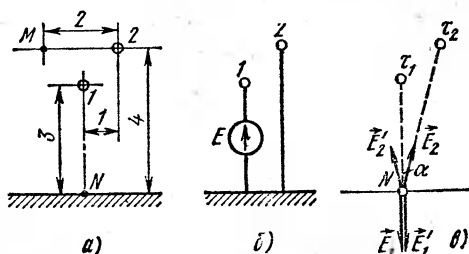


Рис. 19.26

Таким образом,

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1) = U_1(\beta_{11} + \beta_{12}) - \beta_{12}U_{12} = \\ &= U_1C_{11} + U_{12}C_{12} \quad (\varphi_1 = U_1).\end{aligned}$$

Следовательно, для двухпроводной линии:

$$C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12} = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{12}}{\Delta}; \quad C_{12} = -\beta_{12} = \frac{\alpha_{12}}{\Delta}.$$

Аналогичным путем найдем:

$$C_{22} = \beta_{22} + \beta_{12} = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{12}}{\Delta}.$$

По формуле (19.48') найдем:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_1}{r} = 12,4 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{2h_2}{r} = 12,9 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} = 2,9 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 151,6 \cdot 10^{20} \text{ м}^2/\text{Ф}^2;$$

$$C_{11} = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{12}}{\Delta} = 0,659 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м};$$

$$C_{22} = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{12}}{\Delta} = 0,626 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м};$$

$$C_{12} = \frac{\alpha_{12}}{\Delta} = 0,191 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}.$$

Пример 183. Провод 1 примера 182 соединен с землей через источник э. д. с. $E = 127$ В. Провод 2 соединен с землей проводником, так что его потенциал равен нулю (рис. 19.26, б). Определить заряды на проводах 1 и 2 на один погонный метр.

Решение. Из формулы (19.49) при $\varphi_2 = 0$ следует, что

$$\tau_1 = \varphi_1\beta_{11} \quad \text{и} \quad \tau_2 = \varphi_1\beta_{12}; \quad \beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\Delta} = \frac{12,9 \cdot 10^{10}}{151,6 \cdot 10^{20}} = 0,852 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м};$$

$$\beta_{12} = -C_{12} = -0,191 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}.$$

Заряд первого провода $\tau_1 = 127 \cdot 0,852 \cdot 10^{-11} = 1,08 \cdot 10^{-9}$ К/м. Заряд второго провода $\tau_2 = -0,191 \cdot 10^{-11} \cdot 127 = -0,242 \cdot 10^{-9}$ К/м.

Пример 184. Заряд τ_1 на единицу длины провода 1 (см. рис. 19.26, а) равен $2 \cdot 10^{-9}$ К/м. Заряд τ_2 на единицу длины провода 2 равен -10^{-9} К/м. Определить потенциал точки М, полагая потенциал земли равным нулю.

Решение.

$$\begin{aligned}\varphi_M &= \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{1M}}{a_{1M}} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_{2M}}{a_{2M}} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{\sqrt{7^2 + 1^2}}{\sqrt{2}} - \frac{10^{-9}}{2\pi \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{\sqrt{8^2 + 2^2}}{2} = 30,6 \text{ В}.\end{aligned}$$

Пример 185. Определить плотность наведенного заряда на поверхности земли в точке N (см. рис. 19.26, а), полагая, что заряды на проводках такие же, как и в примере 184.

Решение. В соответствии с формулой (19.33) плотность заряда на поверхности проводника равна напряженности в этой точке, умноженной на $\epsilon_a = \epsilon_0$.

Напряженность поля в точке N (рис. 19.26, в) равна геометрической сумме напряженностей от четырех зарядов — от заряда τ_1 (обозначим ее E_1), от заряда τ_2 (E_2) и зеркальных изображений этих зарядов E'_1 и E'_2 : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2$.

Напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}'_1$ направлены по одной прямой (по вертикали). Для нахождения проекций $\vec{E}_2$ и $\vec{E}'_2$ на вертикаль умножаем E_2 и E'_2 на $\cos \alpha$. Плотность заряда

$$\sigma = 2 \cdot \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_a h_1} \epsilon_a - 2 \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_a \sqrt{h_2^2 + a^2}} \cdot \epsilon_a \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + a^2}} = 0,1375 \cdot 10^{-9} \text{ К/м}^2;$$

$$a = 1; \quad h_2 = 4 \text{ м.}$$

Пример 186. Две металлические пластинки (теоретически бесконечной протяженности) находятся в воздухе (рис. 19.27, а), образуя, не соприкасаясь, двугранный угол α_2 . Потенциал первой пластины φ_1 , второй φ_2 . Вывести формулы для определения φ и E в любой точке поля внутри двугранного угла, а также формулу для определения плотности заряда на пластинках. Дать числовой ответ при $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 100 \text{ В}$, $\alpha_2 = 30^\circ$.

Решение. Поскольку граничные поверхности проще всего можно описать в цилиндрической системе координат, то решение будем проводить именно в этой системе. В пространстве между пластинами отсутствуют свободные заряды, поэтому поле подчиняется уравнению Лапласа [см. уравнение (19.30)].

Потенциал φ зависит только от угла α и из условий симметрии не зависит от координаты z и радиуса r цилиндрической системы координат. Поэтому $\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = 0$.

Согласно этому уравнению, $\varphi = C_1\alpha + C_2$. По условию, при $\alpha = 0$ $\varphi = \varphi_1 = 0$, а при $\alpha = \alpha_2$ $\varphi = \varphi_2 = 100 \text{ В}$. Следовательно, $C_2 = 0$; $C_1 = \frac{100}{\pi/6} = 600/\pi$ и $\varphi = \frac{600}{\pi} \alpha$.

Напряженность поля имеет только одну альфовую составляющую

$$E_\alpha = -\frac{d\varphi}{r d\alpha} = -\frac{C_1}{r} = -\frac{600}{\pi r} \text{ В/м.}$$

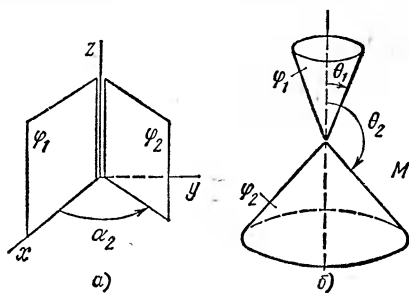


Рис. 19.27

Плотность заряда $\sigma = D = \epsilon_0 E = \epsilon_0 E_\alpha = -\frac{600\epsilon_0}{\pi r}$. Например, при $r = 2$ см: $\sigma = D = -8,48 \cdot 10^{-8}$ К/м².

Пример 187. Две металлические конусообразные воронки находятся в воздухе, обращены остриями друг к другу и не соприкасаются (рис. 19.27, б). Угол $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 135^\circ$, потенциал первой воронки $\varphi_1 = 0$, потенциал второй воронки $\varphi_2 = 1000$ В. Вывести формулу для определения φ и E в пространстве между воронками и найти по ним E и φ в точке M с координатами $R = 2$ см и $\theta = 120^\circ$.

Решение. Воспользуемся сферической системой координат, поскольку поверхности воронок проще всего описываются именно в этой системе. В пространстве между воронками отсутствует объемный заряд, поэтому поле описывается уравнением Лапласа [см. формулу (19.31)].

В силу симметрии φ зависит только от угла θ и не зависит от радиуса R и угла α — двух остальных координат сферической системы.

Таким образом, $\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta} \right) = 0$,

откуда $\sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta} = C_1$; $\varphi = C_1 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + C_2$.

Найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2 . При $\theta = 30^\circ$ $\varphi = 0$, при $\theta = 135^\circ$ $\varphi = 1000$ В. Следовательно, $0 = C_1 \ln \operatorname{tg} 15^\circ + C_2$; $1000 = C_1 \ln \operatorname{tg} 67^\circ 30' + C_2$.

Отсюда $C_1 = 461$ В, $C_2 = 608$ В.

Потенциал точки M : $\varphi_M = 461 \ln \operatorname{tg} 60^\circ + 608 = 856,5$ В.

Напряженность поля имеет только θ -оставляющую:

$$E_\theta = -\frac{d\varphi}{R d\theta} = -\frac{C_1}{R \sin \theta}.$$

Напряженность в точке M : $E_{\theta M} = -\frac{461}{0,02 \sin 120^\circ} = -26,6$ кВ/м.

Пример 188. В вакууме на расстоянии 2 см друг от друга расположены два плоских электрода (рис. 19.28). Правый электрод заземлен, а левый соединен с плюсом батареи, э. д. с. которой 200 В;

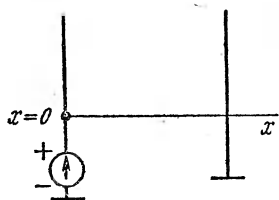


Рис. 19.28

отрицательный зажим батареи заземлен. В пространстве между электродами распределен объемный заряд с плотностью $\rho = -a \epsilon_0 x$, где $a = 30$ кВ/см³; x — расстояние от левой пластины (см. рис. 19.28). Требуется найти закон изменения потенциала в пространстве между электродами.

Решение. Полагаем, что размеры электродов много больше расстояния между ними. Направляем ось x , как показано на рис. 19.28.

Потенциал зависит только от x ; от y и z он в данной задаче не зависит. Следовательно, $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = ax$.

Производим двукратное интегрирование по x : $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{ax^2}{2} + C_1$ и $\varphi = \frac{ax^3}{6} + C_1x + C_2$.

Определим постоянные интегрирования из граничных условий:

при $x = 0$ $\varphi = 200 = C_2$;

при $x = 2$ $\varphi = 0 = 200 + 2C_1 + \frac{30 \cdot 8 \cdot 10^3}{6}$;

$$C_1 = -20\,100 \text{ В/см.}$$

Следовательно, $\varphi = \frac{30 \cdot 10^3 x^3}{6} - 20\,100x + 200 = 5000x^3 - 20\,100x + 200 \text{ В.}$

Пример 189. В цилиндрическом конденсаторе с воздушной изоляцией вокруг внутреннего электрода радиусом r_0 располагается заряд короны с объемной плотностью ρ К/см³. Наружный радиус короны r_1 (рис. 19.29). Радиус наружного электрода r_2 . Потенциал внутреннего электрода φ_0 , потенциал наружного электрода φ_2 .

Вывести формулу для определения φ в пространстве, занятом объемными зарядами (назовем его областью I), и в пространстве, не занятом свободными зарядами (область II).

Решение. В области I:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_I}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Двукратное интегрирование по r дает

$$\varphi_I = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + C_1 \ln r + C_2.$$

В области II:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_{II}}{dr} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_{II} = C_3 \ln r + C_4.$$

Составим четыре уравнения для определения четырех постоянных интегрирования (C_1, C_2, C_3, C_4).

При $r = r_0$ $\varphi_I = \varphi_0$; поэтому $\varphi_0 = -\frac{\rho r_0^2}{4\epsilon_0} + C_1 \ln r_0 + C_2.$ (а)

При $r = r_1$ $\varphi_I = \varphi_{II}$; следовательно,

$$-\frac{\rho r_1^2}{4\epsilon_0} + C_1 \ln r_1 + C_2 = C_3 \ln r_1 + C_4. \quad (б)$$

При $r = r_2$ $\varphi_{II} = 0$; тогда $0 = C_3 \ln r_2 + C_4.$ (в)

При $r = r_1$ равны нормальные составляющие вектора электрического смещения D :

$$\epsilon_0 \left(\frac{d\varphi_I}{dr} \right)_{r=r_1} = \epsilon_0 \left(\frac{d\varphi_{II}}{dr} \right)_{r=r_1} \quad \text{или} \quad C_3 = C_1 - \frac{\rho r_1^2}{2\epsilon_0}. \quad (г)$$

Совместное решение уравнений (а), (б), (в), (г), которое опущено, дает

$$C_1 = \frac{\frac{\rho}{4\epsilon_0} (r_1^2 - r_0^2) + \frac{\rho r_1^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} - \varphi_0}{\ln \frac{r_2}{r_0}}.$$

Далее определяем C_3 из уравнения (г), C_4 из (в) и C_2 из (а).

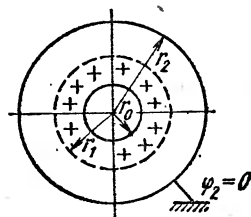


Рис. 19.29

Пример 190. Над поверхностью земли расположилось положительно заряженное грозное облако. Пространство между облаком и землей можно рассматривать как огромных размеров плоский конденсатор. Напряженность поля $\vec{E}$ в нем направлена от облака к земле. Найти потенциал точки A , расположенной на расстоянии 8 м от поверхности земли, в двух случаях: 1) когда над поверхностью земли не протянут заземленный трос (рис. 19.30) и 2) когда над поверхностью земли над точкой A на высоте 10 м от земли протянут заземленный стальной трос диаметром 10 мм (рис. 19.31).

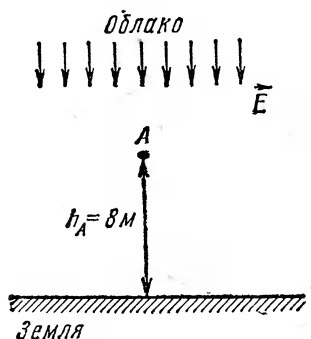


Рис. 19.30

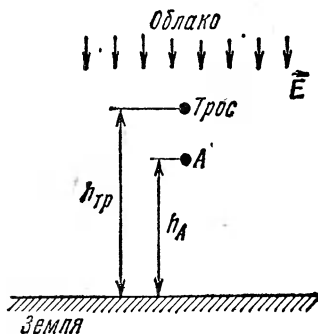


Рис. 19.31

Решение. В случае отсутствия троса (режим I): $\varphi_A^I = Eh_A$, где $h_A = 8$ м.

При наличии троса (режим II) потенциал в точке A создается не только равномерным полем «плоского конденсатора», но и зарядом на тросе $q_{тр}$: $\varphi_A^{II} = Eh_A + q_{тр} \alpha_{12}$.

Здесь через α_{12} обозначен потенциальный коэффициент:

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{10+8}{2}.$$

Составим уравнение для определения заряда троса:

$$\varphi_{тр} = Eh_{тр} + q_{тр} \alpha_{11} = 0.$$

Следовательно,

$$q_{тр} = -\frac{Eh_{тр}}{\alpha_{11}} \quad \text{и} \quad \varphi_A^{II} = E\left(h_A - h_{тр} \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right).$$

Изменение потенциала в точке A , отнесенное к значению потенциала в точке A до появления троса:

$$\frac{\Delta\varphi_A}{\varphi_A^I} = \frac{\varphi_A^I - \varphi_A^{II}}{\varphi_A^I} = \frac{E\left\{h_A - \left(h_A - h_{тр} \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right)\right\}}{Eh_A} = \frac{10 \cdot 0,251}{8} = 0,313;$$

$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} = \frac{\ln \frac{18}{2}}{\ln 4000} = \frac{2,08}{8,3} = 0,251.$$

Пример 191. В равномерное поле с напряженностью $E_0 = 10^3$ кВ/м внесен незаряженный металлический шар радиусом $a = 1$ см. Найти E_R и E_θ в точке A . Координаты точки A : $R = 2$ см и $\theta = 30^\circ$.

Решение. В соответствии с формулами § 19.40 имеем:

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = -E_0 \cos \theta \left(1 + \frac{2a^3}{R^3}\right) = \\ = -10^6 \cdot 0,866 \left(1 + \frac{2}{8}\right) = -1,082 \cdot 10^6 \text{ В/м};$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} = E_0 \sin \theta \left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right) = 10^6 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 0,4375 \cdot 10^6 \text{ В/м}.$$

Результирующая напряженность поля по модулю:

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2} = 1,168 \cdot 10^6 \text{ В/м}.$$

Пример 192. В воздухе создано равномерное электрическое поле напряженностью $E_0 = 10^3$ кВ/м. В это поле диэлектрический цилиндр ($\epsilon_i = 4\epsilon_0$) поместили так, что его ось перпендикулярна полю. Найти напряженность поля E_i внутри цилиндра.

Решение. Воспользуемся формулой (19.72):

$$E_i = E_0 \frac{2\epsilon_0}{\epsilon_i + \epsilon_0} = 10^3 \frac{2 \cdot 1}{4 + 1} = 4 \cdot 10^2 \text{ кВ/м}.$$

Пример 193. В некоторой области пространства имеется поле, потенциал которого зависит только от координаты x декартовой системы: $\varphi = 5x^3 - 60x^2$.

Найти закон изменения плотности свободных зарядов в этом поле.

Решение. Уравнение Пуассона, описывающее поле, можно записать так:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}. \text{ Дважды дифференцируем } \varphi \text{ по } x:$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 15x^2 - 120x; \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 30x - 120.$$

Следовательно, $\rho_{\text{своб}} = (-30x + 120) \epsilon_a$.

Пример 194. Вывести формулу для определения напряженности и потенциала поля, создаваемого заряженной осью длиной l (рис. 19.32). Заряд на единицу длины оси равен τ .

Решение. Определим E и φ в произвольной точке k . Расположим оси декартовой системы координат в соответствии с рис. 19.32. Выделим отрезок оси длиной dx , на нем будет заряд τdx . В силу малости dx будем считать этот заряд точечным и по теореме Гаусса найдем создаваемую им напряженность поля в точке k :

$$dE = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_a R^2}.$$

Проекция $d\vec{E}$ на ось x $dE_x = dE \cos(180 - \beta) = \frac{-\tau \cos \beta dx}{4\pi\epsilon_a R^2}$.

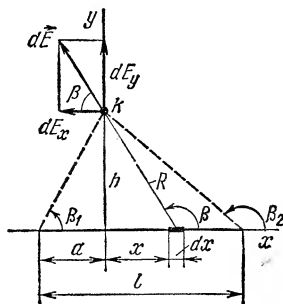


Рис. 19.32

Угол β отсчитываем от положительного направления dx к положительному направлению радиуса R (последний направлен от dx к точке k) (верхний угол β на рис. 19.32 указан ошибочно).

Проекция $d\vec{E}$ на ось y : $dE_y = dE \sin(180 - \beta) = \frac{\tau \sin \beta dx}{4\pi\epsilon_a R^2}$,
 Заменяем:

$$R = \frac{h}{\sin \beta}; \quad x = -h \operatorname{ctg} \beta; \quad dx = \frac{h d\beta}{\sin^2 \beta};$$

$$E_x = \frac{-\tau}{4\pi\epsilon_a h} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a h} (\sin \beta_1 - \sin \beta_2);$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a h} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a h} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2);$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

Составляющая потенциала в точке k от точечного заряда τdx :

$$d\varphi = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_a R} = \frac{\tau d\beta}{4\pi\epsilon_a \sin \beta};$$

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{d\beta}{\sin \beta} = -\operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg} \beta) \Big|_{\beta_1}^{\beta_2}; \quad \varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a} \left(\operatorname{Arsh} \frac{l-a}{h} + \operatorname{Arsh} \frac{a}{h} \right).$$

§ 19.48. Метод средних потенциалов. Как уже говорилось, в электростатическом поле, образованном системой заряженных проводящих тел, все точки поверхности каждого тела имеют одинаковый потенциал, а поверхностная плотность зарядов τ в общем случае изменяется от точки к точке.

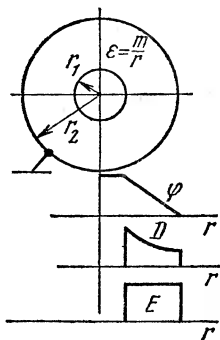


Рис. 19.33

В тех случаях, когда неравномерность распределения зарядов по поверхности тела невелика, для подсчета емкостей иногда пользуются методом средних потенциалов (приближенный метод). В его основу положено заведомо неправильное предположение, что на поверхности каждого тела заряды распределены с одинаковой плотностью, а различные точки одного и того же проводящего тела имеют неодинаковые потенциалы. Это предположение дает возможность относительно легко найти среднее значение потенциала $\varphi_{\text{ср}}$ тела и по известному заряду тела найти его емкость. Результат оказывается близким к истинному.

Пример 195. Определить емкость уединенного прямого проводника длиной l и радиусом r .

Решение. Воспользуемся формулой для потенциала произвольной точки k , полученной в примере 194.

Сосредоточим заряд на оси провода с плотностью τ на единицу длины и поместим точку k (рис. 19.32) на поверхность провода (т. е. примем $h = r$). Тогда

$$\varphi_{\text{ср}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a} \frac{1}{l} \int_0^l \left(\operatorname{Arsh} \frac{l-a}{r} + \operatorname{Arsh} \frac{a}{r} \right) da = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \frac{1}{l} \int_0^l \operatorname{Arsh} \frac{a}{r} da;$$

$$\int \operatorname{Arsh} x dx = x \operatorname{Arsh} x - \sqrt{1+x^2};$$

$$\varphi_{\text{ср}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left[\operatorname{Arsh} \frac{l}{r} - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2} + \frac{r}{l} \right].$$

По определению (§ 19.29), заряд уединенного тела $q = \Phi_{\text{ср}} C$. Поэтому емкость уединенного цилиндрического провода

$$C = 2\pi\epsilon_a l \left[\operatorname{Arsh} \frac{l}{r} - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2} + \frac{r}{l} \right]^{-1}.$$

Выражение в квадратных скобках может быть упрощено. Так как $\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, а при $x \gg 1$ $\operatorname{Arsh} x \approx \ln 2x$, то при $l/r \gg 1$ скобка равна $\ln \frac{l}{r} + \ln 2 - 1$. Отсюда

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{l}{r} - 0,307}.$$

Пример 196. Вследствие неравномерного нагрева диэлектрическая проницаемость изоляции коаксиального кабеля (см. рис. 19.33) изменяется в функции радиуса r следующим образом: $\epsilon_a = m/r$. Вывести формулы для определения напряженности электрического поля E и смещения D . Радиус жилы кабеля r_1 , внутренний радиус оболочки r_2 , напряжение между жилой и оболочкой U . Объемный заряд отсутствует.

Решение. Воспользуемся теоремой Гаусса [формула (19.20)] в дифференциальной форме [применять уравнение Лапласа в данном случае нельзя, так как оно выведено при условии, что $\epsilon_a = \text{const}$, (см. § 19.15)]. В формуле (19.24) заменим $\vec{E}$ на $\vec{D}$ и учтем, что $\vec{D}$ имеет только одну r -составляющую и в силу симметрии не зависит от координат r и α . Будем иметь

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rD_r) = 0.$$

Отсюда следует, что $rD_r = rD = C$; $D = C/r$, где C — некоторая постоянная.

Таким образом, D изменяется обратно пропорционально радиусу. Напряженность поля $E = D/\epsilon_a = C/m$, т. е. напряженность поля — величина постоянная. Определим постоянную C . Для этого воспользуемся тем, что

$$\int_{r_1}^{r_2} E dr = U = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C}{m} dr = \frac{C}{m} (r_2 - r_1),$$

отсюда

$$C = \frac{mU}{r_2 - r_1}.$$

Графики изменения E , D и Φ см. на рис. 19.33.

Обратим внимание на то, что если бы диэлектрическая проницаемость ϵ_a изоляции коаксиального кабеля примера 196 была постоянной величиной (не являлась бы функцией r), то имели бы место следующие зависимости:

$$E = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad D = \epsilon_a E; \quad \Phi = \frac{U \ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

т. е. в этом случае напряженность поля была бы не постоянна, а изменялась обратно пропорционально радиусу, потенциал Φ изменялся бы не линейно в функции r , а по логарифмическому закону.

Пример 197. Вывести формулы для расчета поля диполя.

Решение. Диполь изображен на рис. 19.34. Расстояние между зарядами обозначим через l . При решении воспользуемся сфериче-

ской системой координат. Обозначим расстояние от произвольной точки a до заряда $+q$ через R_1 , до заряда $-q$ — через R_2 и до середины диполя — через R . Угол между вертикалью и радиусом R равен θ . Потенциал точки a определим как потенциал в поле двух точечных зарядов:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Если $R \gg l$, то $R_1 \cdot R_2 \approx R^2$, а $R_2 - R_1 \approx l \cos \theta$; поэтому

$$\varphi \approx \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_a R^2}. \quad (19.73)$$

По формулам § 19.10 найдем:

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{ql \cos \theta}{2\pi\epsilon_a R^3}; \quad (19.74)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{R \partial \theta} = \frac{ql \sin \theta}{4\pi\epsilon_a R^3}, \quad (19.75)$$

$$E_a = 0;$$

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_a R^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}. \quad (19.76)$$

Таким образом, в поле диполя при $R \gg l$ потенциал φ изменяется обратно пропорционально второй, а напряженность — обратно про-

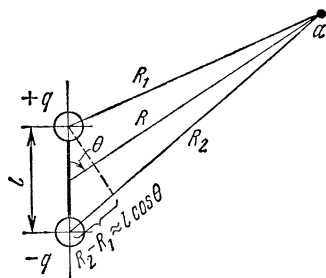


Рис. 19.34

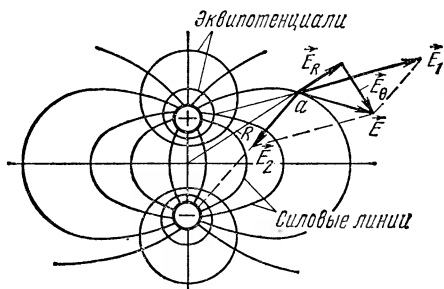


Рис. 19.35

порционально третьей степени расстояния R рассматриваемой точки до диполя; φ и E являются функциями угла θ .

Картина поля диполя изображена на рис. 19.35. Напряженность поля в некоторой произвольной точке a равна геометрической сумме напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ от зарядов $+q$ и $-q$. Если воспользуемся сферической системой координат, то напряженность поля в той же точке a можно представить в виде суммы напряженностей $\vec{E}_R$ и $\vec{E}_\theta$; $\vec{E}_R$ направлена вдоль радиуса R , а $\vec{E}_\theta$ имеет направление θ .

Пример 198. Вывести формулы для определения величины напряженности поля и емкости двухслойного плоского конденсатора рис. 19.36, а также построить графики изменения модуля вектора напряженности электрического поля E , модуля вектора электрической индукции D и потенциала φ в функции расстояния x .

Толщина первого слоя диэлектрика d_1 , второго — d_2 . Абсолютная диэлектрическая проницаемость первого слоя ϵ_{a1} , второго слоя ϵ_{a2} . Принять $\epsilon_{a1} = 2\epsilon_{a2}$ и $d_2 = 1,5 d_1$.

Решение. Все величины, относящиеся к первому слою, обозначим индексом 1, а ко второму слою — индексом 2. Положим, что разность потенциалов между обкладками конденсатора равна U .

Искажающее влияние краев конденсатора на поле учитывать не будем. При этом условии в каждом слое поле будет равномерным. В силу того что нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ непрерывна, имеем $D_{1n} = D_{2n}$.

Но $D_{1n} = \epsilon_{a1}E_1$; $D_{2n} = \epsilon_{a2}E_2$. Следовательно,

$$\epsilon_{a1}E_1 = \epsilon_{a2}E_2. \quad (a)$$

Таким образом, отношение напряженностей обратно пропорционально отношению электрических проницаемостей.

Уравнение (a) связывает две пока неизвестные величины E_1 и E_2 . Второе уравнение относительно E_1 и E_2 составим, исходя из того, что

$$\int_0^{d_1} \vec{E}_1 d\vec{x} + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \vec{E}_2 d\vec{x} = U \quad \text{или} \\ E_1 d_1 + E_2 d_2 = U. \quad (б)$$

Совместное решение (a) и (б) дает $E_1 =$

$$= \frac{U}{d_1 + \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}} d_2}.$$

Графики зависимостей D , E и ϕ от расстояния x изображены на рис. 19.36.

Для нормальной работы конденсатора необходимо, чтобы напряженность электрического поля ни в первом, ни во втором слоях конденсатора не достигла значения напряженности, при котором происходит пробой данного диэлектрика.

Напряженность равномерного поля, при которой происходит пробой данного диэлектрика, принято называть *пробивной напряженностью*. Пробивная напряженность диэлектриков, особенно газообразных, сильно зависит от температуры и давления. Пробивная напряженность воздуха равна 30 кВ/см при нормальном атмосферном давлении и температуре 18°С.

При выводе формулы для емкости двухслойного плоского конденсатора на границу раздела двух диэлектриков мысленно поместим бесконечно тонкий металлический листок. Эта операция вполне допустима, так как поверхность раздела диэлектриков как была эквипотенциальной поверхностью до помещения листка, так и остается ею после помещения на нее листка; причем значение потенциала ее при этом не изменится.

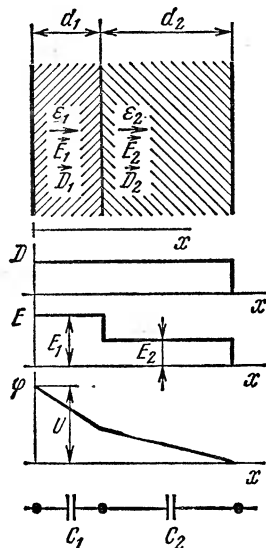


Рис. 19.36

После проведения такой операции (ее иногда называют *способом отвердения*) емкость двухслойного конденсатора можно подсчитать как емкость двух последовательно включенных конденсаторов C_1 и C_2 ; C_1 — емкость первого слоя конденсатора, C_2 — емкость второго слоя конденсатора:

$$C_1 = \frac{\epsilon_{a1} S}{d_1}; \quad C_2 = \frac{\epsilon_{a2} S}{d_2},$$

где S — площадь одной пластины конденсатора с одной стороны.

Емкость двух последовательно включенных конденсаторов

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{S}{\frac{d_2}{\epsilon_{a2}} + \frac{d_1}{\epsilon_{a1}}}.$$

§ 19.49. О расчете электрических полей, создаваемых диэлектриками, сохраняющими остаточную поляризацию при снятии внешнего поля. Поле, которое создает

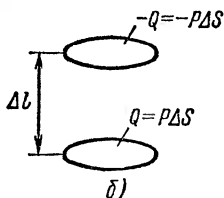
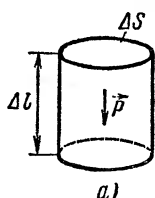


Рис. 19.37

однородно поляризованный диэлектрик с остаточной поляризацией $\vec{P}$ (электрет, сегнетодиэлектрик) (на рис. 19.37, а он изображен в виде цилиндра длиной Δl и площадью поперечного сечения ΔS) на основании § 19.14 будет таким же, как поле воздушного конденсатора, изображенного на рис. 19.37, б. Площадь пластин этого конденсатора равна ΔS , расстояние между ними Δl , заряды на пластинах равны соответственно $\pm P\Delta S$.

Если поле создается не только диэлектриком с остаточной поляризацией, но и другими заряженными телами, то следует использовать принцип наложения. Поле определяется вне поляризованного диэлектрика.

Впросы для самопроверки

1. Охарактеризуйте понятие «электростатическое поле». 2. Какой физический смысл придается $\vec{E}$ и φ ? Какая интегральная и дифференциальная связь существует между ними? 3. Какие поля называют потенциальными? 4. Что понимают под картиной поля? Какие характеристики поля называют точечными, какие интегральными? 5. В чем отличие свободных зарядов от связанных? 6. Каков смысл вектора $\vec{P}$? Что послужило основанием для введения вектора $\vec{D}$? 7. Дайте физическое толкование понятиям градиента и дивергенции. 8. Могут ли при переходе через границу раздела двух сред с различными ϵ полные значения $\vec{E}$ и $\vec{D}$ изменяться скачками? 9. Охарактеризуйте поле точечного и линейного зарядов и поле диполя. 10. Дайте обоснование методу зеркальных изображений. 11. Что определяют потенциальные и емкостные коэффициенты и частичные емкости? 12. Дайте примеры плоскопараллельного, плоскомеридианного и равномерного полей. 13. Охарактеризуйте идею и этапы решения уравнений в частных производных методом разделения переменных. 14. Какое допущение принято в методе средних потенциалов? 15. Тонкое кольцо радиуса a заряжено с плотностью τ и находится в воздухе; определите создаваемую им напряженность E в точке на оси на расстоянии h от кольца (ответ: $\frac{ath}{2\epsilon_0 (h^2 + a^2)^{3/2}})$. 16. Решите задачи: 19.3; 19.5; 19.12; 19.17; 19.24; 19.26; 19.28; 19.32; 19.39; 19.45; 19.51 (номера задач здесь и в последующих главах указаны по [18]).

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

§ 20.1. Плотность тока и ток. Если под воздействием внешних источников в проводящей среде (металлических проводниках, земле, жидкостях) создано электрическое поле, то в ней будет протекать электрический ток.

Упорядоченное движение свободных электронов в металле и ионов в жидкости под действием электрического поля принято называть *током проводимости*.

При своем упорядоченном движении носители зарядов испытывают многочисленные столкновения с другими частицами вещества, которые находятся в тепловом движении. Эти столкновения затрудняют упорядоченное движение носителей зарядов и являются причиной сопротивления, оказываемого проводящей средой прохождению тока.

Свойство среды, характеризующее ее способность проводить ток, называют *удельной проводимостью* γ . Удельная проводимость γ зависит от физических свойств проводящего материала и температуры, имеет размерность $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} = \text{См/м}$.

Электрическое поле в проводящей среде подчиняется законам, рассмотренным в данной главе.

Основной величиной в электрическом поле проводящей среды является плотность тока $\vec{\delta}$. Это векторная величина, направленная по напряженности электрического поля. Она численно равна отношению тока Δi , протекающего через элемент поверхности ΔS (перпендикулярный к направлению напряженности поля в данной точке), к величине ΔS этой поверхности.

Если поверхность имеет конечные размеры, то направление вектора плотности тока во всех элементах, на которые может быть разбита эта поверхность, и направление элементов поверхности могут быть различны, и ток определится так:
$$I = \int_S \vec{\delta} d\vec{S}.$$

Таким образом, *ток есть поток вектора плотности тока*.

Ток в отличие от плотности тока является скаляром алгебраического характера.

При протекании постоянных токов как внутри проводящих тел, так и вне их существуют постоянные (неизменные во времени) магнитные поля. Так как эти поля неизменны во времени, то в поле не возникает явления электромагнитной индукции, т. е. магнитное поле, созданное постоянным током, не оказывает влияния на электрическое поле постоянного тока. Поэтому электрическое и магнитное поля постоянного тока можно рассматривать раздельно.

Магнитное поле постоянного тока рассматривается в гл. 21.

§ 20.2. Закон Ома и второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме. Выделим в проводящей среде небольшой параллелепипед объемом ΔV . Длина ребра параллелепипеда Δl , площадь поперечного сечения ΔS . Расположим этот параллелепипед так, чтобы напряжен-

ность поля в нем была направлена параллельно ребру (рис. 20.1, а). В силу малости объема можно считать, что напряженность электрического поля $\vec{E}$ одна и та же во всем элементарном объеме; $\Delta \vec{l} = \Delta l \vec{n}^\circ$; $\Delta \vec{S} = \Delta S \vec{n}^\circ$, где $\vec{n}^\circ$ — единичный вектор по направлению $\Delta \vec{l}$, $\Delta \vec{S}$ и $\vec{E}$. Ток $I = \int \delta \vec{dS} = \oint \delta \Delta \vec{S}$. Напряжение на элементе объема $U = \vec{E} \Delta \vec{l} = RI$. Сопротивление элемента объема $R = \frac{\Delta l}{\gamma \Delta S}$.

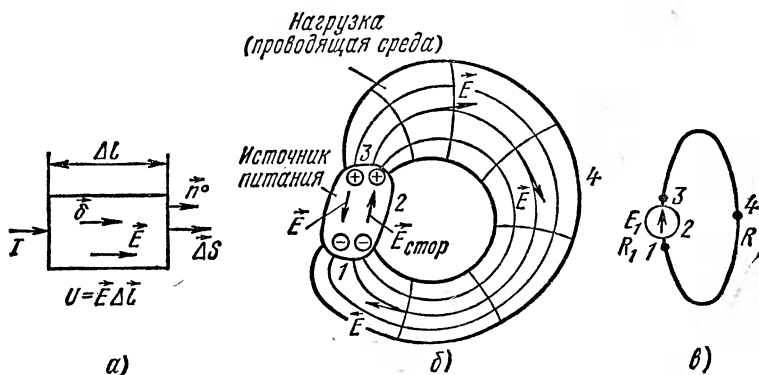


Рис. 20.1

Подставив в выражение $RI = \vec{E} \Delta \vec{l}$ эквиваленты R и I , получим

$$\frac{\Delta l}{\gamma \Delta S} \oint \delta \Delta S \vec{n}^\circ = \vec{E} \Delta l \vec{n}^\circ,$$

откуда

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}. \quad (20.1)$$

Соотношение (20.1) называют *законом Ома в дифференциальной форме*. Оно устанавливает связь между плотностью тока в данной точке проводящей среды и напряженностью поля в этой же точке.

Уравнение (20.1) справедливо для областей вне источников э. д. с. В областях, занятых источниками э. д. с., кроме кулонова (электростатического) поля существует еще так называемое *стороннее электрическое поле*, обеспечивающее непрерывное движение зарядов в электрической цепи.

Под *сторонним электрическим полем* понимают электрическое поле, обусловленное химическими, электрохимическими, тепловыми, термоэлектрическими процессами.

Напряженность стороннего поля обозначают $\vec{E}_{\text{стор}}$. В областях, занятых источниками э. д. с., полное значение напряженности поля равно геометрической сумме напряженности кулонова и стороннего полей $\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}$.

На рис. 20.1, б схематически изображена электрическая цепь постоянного тока, состоящая из источника питания и нагрузки.

Источник сторонней э. д. с. создает внутри источника питания стороннюю напряженность поля $\vec{E}_{\text{стор}}$.

Линейный интеграл от сторонней напряженности поля внутри источника называется э. д. с. источника (E_1):

$$\int_1^3 \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = E_1. \quad (20.2)$$

Под действием стороннего поля в источнике непрерывно происходит разделение электрических зарядов. Положительные заряды перемещаются к плюсу источника, а отрицательные — к минусу.

Эти заряды в области внутри и вне источника создают электрическое поле, напряженность которого, как и напряженность электростатического (кулонова) поля, направлена от положительных зарядов к отрицательным.

При протекании постоянного тока по цепи одни электрические заряды непрерывно сменяются другими, такими же, как и в предыдущие моменты времени. Таким образом, картина поля в макроскопическом смысле повторяется в смежные моменты времени. Поле носит как бы статический характер. Это и послужило основанием для того, чтобы поле, созданное в проводящей среде разделившимися зарядами, называть *кулоновым полем*, а его напряженность $\vec{E}$ — *напряженностью* кулонова поля.

Внутри источника кулоново поле направлено навстречу стороннему полю. Полное значение напряженности поля внутри источника равно $\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}$. Вне источника кулоново поле направлено от положительного электрода к отрицательному. Под действием этого поля и происходит упорядоченное движение зарядов в области вне источника. При протекании тока по цепи $|\vec{E}_{\text{стор}}| > |\vec{E}|$. При разомкнутой цепи $|\vec{E}_{\text{стор}}| = |\vec{E}|$.

Закон Ома в дифференциальной форме для областей, занятых источниками э. д. с., записывают следующим образом:

$$\vec{\delta} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (20.3)$$

Уравнение (20.3) называют *обобщенным законом Ома в дифференциальной форме*.

Если от обеих частей уравнения (20.3) взять интеграл по замкнутому контуру, включающему в себя источник э. д. с., то из уравнения (20.3) будет получен второй закон Кирхгофа. Поэтому уравнение (20.3) называют также *вторым законом Кирхгофа в дифференциальной форме*.

На рис. 20.1, в изображен замкнутый контур, по которому течет ток I . На участке 123 имеется источник сторонней э. д. с. E_1 . На участке 341 нет источников сторонней э. д. с. Обозначим через R_1 сопротивление участка 123 и через R — сопротивление участка 341. Примем, что площадь поперечного сечения всех участков замкнутого контура достаточно мала для того, чтобы можно было считать направление плотности тока и напряженности поля в некоторой точке совпадающими с направлением элемента пути $d\vec{l}$ в той же точке.

Умножим обе части (20.3) на $\frac{d\vec{l}}{\gamma}$ и составим циркуляцию вдоль замкнутого контура 12341 (рис. 20.1, в):

$$\oint \vec{\delta} \frac{d\vec{l}}{\gamma} = \oint (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) d\vec{l}.$$

Интеграл от суммы равен сумме интегралов. Поэтому

$$\oint (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) d\vec{l} = \oint \vec{E} d\vec{l} + \oint \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}.$$

$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ в силу потенциального характера кулонова поля.

В свою очередь

$$\oint \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = \int_{123} \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} + \int_{341} \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l},$$

но $\int_{123} \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}$ равен сторонней э. д. с. E_1 , а $\int_{341} \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = 0$, так как на участке 341 нет сторонней э. д. с.

Для подсчета величины $\oint \frac{\vec{\delta} d\vec{l}}{\gamma}$ умножим и разделим подынтегральное выражение на площадь поперечного сечения S , от плотности тока $\vec{\delta}$ перейдем к току I и заменим $\frac{dl}{\gamma S}$ на сопротивление участка пути dR . Получим:

$$\frac{\vec{\delta} d\vec{l}}{\gamma} \frac{S}{S} = \frac{I dl}{\gamma S} = I dR;$$

$$\oint \frac{\vec{\delta} d\vec{l}}{\gamma} = I \oint dR = I \int_{123} dR + I \int_{341} dR = IR_1 + IR.$$

Таким образом, из уравнения (20.3) образовано уравнение $I(R_1 + R) = E_1$, составленное по второму закону Кирхгофа.

§ 20.3. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме.

Если в проводящей среде выделить некоторый объем, по которому протекает постоянный, не изменяющийся во времени ток, то можно сказать, что ток, который войдет в объем, должен равняться току, вышедшему из него, иначе в этом объеме происходило бы накопление электрических зарядов, что опыт не подтверждает. Сумму входящего в объем и выходящего из объема токов записывают так:

$$\oint \vec{\delta} d\vec{S} = 0. \quad (20.4)$$

Если разделить и левую и правую части (20.4) на одно и то же число (на объем, о котором шла речь), то равенство останется справедливым:

$$\frac{\oint \vec{\delta} d\vec{S}}{V} = 0.$$

Очевидно, что последнее соотношение будет справедливо и в том случае, если объем, находящийся внутри замкнутой поверхности, устремим к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{\delta} d\vec{S}}{V} = \text{div } \vec{\delta} = 0.$$

Таким образом, для постоянного, неизменного во времени поля в проводящей среде:

$$\text{div } \vec{\delta} = 0. \quad (20.5)$$

Это соотношение называют *первым законом Кирхгофа в дифференциальной форме*. Оно означает, что в установившемся режиме (при постоянном токе) в любой точке поля нет ни истока, ни стока линий тока проводимости $\vec{\delta}$.

§ 20.4. Дифференциальная форма закона Джоуля — Ленца. В гл. 1 отмечалось, что если по какому-либо проводнику сопротивлением R протекает постоянный ток I , то в единицу времени (в секунду) в нем выделяется энергия, равная $I^2 R$. Определим энергию, выделяющуюся в единицу времени в единице объема проводящей среды (с этой целью воспользуемся рис. 20.1, а):

$$\frac{I^2 R}{V} = \frac{(\delta \Delta S)^2}{\Delta l \Delta S} \left(\frac{\Delta l}{\gamma \Delta S} \right) = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma E^2. \quad (20.6)$$

Следовательно, в единице объема проводящей среды в единицу времени выделяется энергия, численно равная γE^2 .

§ 20.5. Уравнение Лапласа для электрического поля в проводящей среде. Так же как и в электростатическом поле, напряженность электрического поля в проводящей среде $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$.

В неизменном во времени поле

$$\text{div } \vec{\delta} = \text{div } \gamma \vec{E} = 0. \quad (20.7)$$

Если γ среды не изменяется от точки к точке, т. е. если среда однородна и изотропна, то γ как постоянную величину можно вынести за знак дивергенции и, следовательно, вместо $\text{div } \gamma \vec{E} = 0$ можно написать $\gamma \text{div } \vec{E} = 0$ или

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad (20.8)$$

т. е.

$$\text{div } (-\text{grad } \varphi) = 0$$

или

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (20.9)$$

Таким образом, поле в однородной проводящей среде подчиняется уравнению Лапласа. Поле постоянного тока в проводящей среде является полем потенциальным. В нем, в областях, не занятых источниками, $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$.

§ 20.6. Переход тока из среды с проводимостью γ_1 в среду с проводимостью γ_2 . Граничные условия. Выясним, какие граничные условия выполняются при переходе тока из среды с одной проводимостью в среду с другой проводимостью.

На рис. 20.2 линия OO' есть граница раздела сред. Возьмем на границе плоский замкнутый контур 1234. Составим циркуляцию вдоль этого контура. Стороны 12 и 34 его весьма малы по сравнению со сторонами 23 и 41 (длину последних обозначим dl).

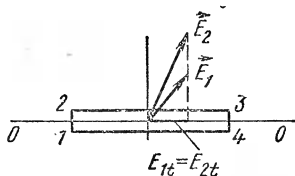


Рис. 20.2

Так как $\oint \vec{E} d\vec{l}$ вдоль любого замкнутого контура равно нулю, то оно равно нулю и для контура 1234.

В силу малости отрезков 12 и 34 пренебрежем составляющими интеграла вдоль этих путей и тогда:

$$E_{1t} dl - E_{2t} dl = 0 \quad \text{или} \quad E_{1t} = E_{2t}. \quad (20.10)$$

Это соотношение совпадает с соотношением (19.34).

На границе раздела равны нормальные составляющие плотностей токов. Докажем это.

На границе раздела выделим сплюснутый параллелепипед (рис. 20.3, а). Поток вектора $\vec{\delta}$, втекающий в объем через нижнюю грань,

равен $-\delta_{1n}\Delta S$; поток вектора $\vec{\delta}$, вытекающий из объема через верхнюю грань, $\delta_{2n}\Delta S$. Так как $\oint \vec{\delta} d\vec{S} = 0$, то:

$$-\delta_{1n}\Delta S + \delta_{2n}\Delta S = 0; \quad (20.11)$$

$$\delta_{1n} = \delta_{2n}.$$

Следовательно, при переходе тока из среды с одной проводимостью в среду с другой проводимостью непрерывна тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$, т. е. $E_{1t} = E_{2t}$

(но $E_{1n} \neq E_{2n}$), и непрерывна нормальная составляющая плотности тока $\delta_{1n} = \delta_{2n}$ (но $\delta_{1t} \neq \delta_{2t}$).

Отсюда следует, что полные значения вектора $\vec{E}$ и вектора $\vec{\delta}$ в общем случае меняются скачком на границе раздела.

Найдем связь между углом падения β_1 и углом преломления β_2 . В соответствии с рис. 20.3, б:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\delta_{1t}}{\delta_{1n}} = \frac{E_{1t}\gamma_1}{E_{1n}};$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\delta_{2t}}{\delta_{2n}} = \frac{E_{2t}\gamma_2}{E_{2n}}$$

или

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (20.12)$$

Если ток переходит из среды с большой проводимостью (например, из металла) в среду с малой проводимостью (например, в землю), то тангенс угла преломления $\operatorname{tg} \beta_2 = \operatorname{tg} \beta_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ меньше тангенса угла падения и, следовательно, угол β_2 будет меньше угла β_1 . Если γ_2 весьма мало, то угол $\beta_2 \rightarrow 0$.

§ 20.7. Аналогия между полем в проводящей среде и электростатическим полем. По своей природе поле электростатическое и поле постоянного тока в проводящей среде различны. Электростатическое поле создается электрическими зарядами, неизменными во времени и неподвижными в пространстве, тогда как электрическое поле

в проводящей среде — это поле, в котором электрические заряды имеют упорядоченное движение под действием внешнего источника. Тем не менее между двумя полями может быть проведена определенная формальная аналогия.

Действительно, электростатическое поле в областях, не занятых зарядами, удовлетворяет уравнению Лапласа. Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде вне сторонних источников также ему удовлетворяет. В обоих полях имеют дело с вектором напряженности поля $\vec{E}$. С вектором электрического смещения $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ можно сопоставить вектор плотности тока $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$. С потоком вектора $\vec{D}$ (обозначим его буквой ψ) $\psi = \int \vec{D} d\vec{s}$ можно сопоставить поток вектора плотности электрического тока $I = \int \vec{\delta} d\vec{S}$.

Граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков: $E_{1t} = E_{2t}$ и $D_{1n} = D_{2n}$.

Граничные условия на поверхности раздела двух сред с различной проводимостью $E_{1t} = E_{2t}$ и $\delta_{1n} = \delta_{2n}$.

Но если два поля удовлетворяют одному и тому же уравнению $\nabla^2 \phi = 0$ и в них выполняются тождественные граничные условия для сходных величин, то при одинаковой форме граничных поверхностей на основании теоремы единственности можно сказать, что совокупность силовых и эквипотенциальных линий в этих двух полях (т. е. картина поля) будет одинаковой.

Эта формальная аналогия широко используется на практике. Так, например, если какое-либо электростатическое поле уже изучено, то все сведения о нем могут быть перенесены и на геометрически подобное поле в проводящей среде. Справедливо и обратное заключение.

§ 20.8. Экспериментальное исследование полей. Если форма граничных поверхностей (электродов) сложна, то аналитический расчет поля осуществить довольно трудно. Непосредственно же определить потенциалы точек электростатического поля, помещая в них зонды, обычно также не удается, потому что зонды даже при малой мощности, потребляемой индикаторами, своим присутствием искажают поле.

В этом случае поле исследуют экспериментально на модели, т. е. прибегают к моделированию, либо в электролитической ванне, либо на твердой модели. Рассмотрим, как производится моделирование двухмерного поля в электролитической ванне *.

В ванну с электролитом (например, с подкисленной водой) помещают электроды (рис. 20.4). Форма и их взаимное расположение должны быть точно такими же, как и в изучаемом электростатическом поле. Для того чтобы стенки ванны меньше искажали исследуемое поле, линейные размеры ванны должны в несколько раз превышать соответствующие линейные размеры исследуемого участка поля.

Электроды соединяют с источником э. д. с. низкой частоты (обычно 50 Гц). Использовать в качестве источника питания э. д. с. постоян-

* В приложении Е' на стр. 204 рассматриваются основы другого метода моделирования полей — с помощью электрических сеток.

ного тока нельзя, так как при постоянном токе будет происходить электролиз подкисленной воды, и пузырьки газа, осаждаясь на электродах, будут искажать исследуемое поле. По электролиту проходит переменный ток.

С помощью вспомогательного реостата P , зонда (щупа) и индикатора нуля $И$ можно снять семейство эквипотенциальных линий в поле. С этой целью устанавливают движок реостата в каком-либо фиксированном положении и, перемещая зонд (щуп) так, чтобы индикатор показывал нуль, находят совокупность точек, потенциал которых равен

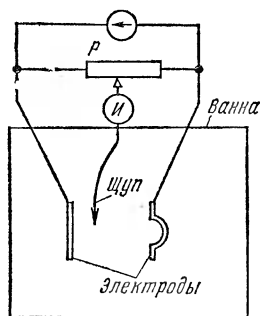


Рис. 20.4

потенциалу движка реостата. Далее перемещают движок реостата в новое положение и определяют координаты точек второй эквипотенциали и т. д. Затем по семейству эквипотенциалей строят сетку силовых линий. При построении последней руководствуются тем, что силовые линии в любой точке поля должны быть перпендикулярны эквипотенциалам, в том числе и поверхностям электродов.

В электростатическом поле силовые линии перпендикулярны поверхностям электродов. В поле проводящей среды силовые линии, строго говоря, не совсем перпендикулярны поверхностям электродов. Но если проводимость электродов будет во много раз больше проводимости электролита, то [см. формулу (20.12)] с большой степенью

точности можно считать, что силовые линии будут подходить к поверхностям электродов практически под прямым углом.

Моделирование двухмерных полей на твердой модели осуществляют обычно на специально выпускаемой электропроводной бумаге (в обычную бумагу добавляют сажу или графит). Металлические электроды ставят на бумагу и подводят к ним напряжение переменного или постоянного тока. Ток проходит по бумаге. Семейство эквипотенциалей снимают так же, как и в электролитической ванне.

§ 20.9. Соотношение между проводимостью и емкостью. Если какие-либо электроды поместить в проводящую среду и присоединить к источнику э. д. с., то в проводящей среде пойдет ток. Если напряжение между электродами 1 и 2 равно U_{12} и по среде проходит ток I , то проводимость между электродами 1 и 2 $G = I/U_{12}$.

Так как ток $I = \int \vec{\delta} d\vec{S} = \gamma \int \vec{E} d\vec{S}$ и $U_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$, то

$$G = \frac{\gamma \int \vec{E} d\vec{S}}{\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}}. \quad (20.13)$$

В свою очередь в электрическом поле с электродами такой же конфигурации емкость между двумя частями электродов, на которых рас-

положены одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды Q , создающие поток Ψ вектора электрической индукции $\vec{D}$ $\Psi = Q = \int \vec{D} d\vec{S}$, будет:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_a \int \vec{E} d\vec{S}}{\int \vec{E} d\vec{l}}. \quad (20.14)$$

Если разделить (20.14) на (20.13), то после сокращения получим

$$C/G = \epsilon_a/\gamma, \quad (20.15)$$

т. е. емкость C между двумя телами, разделенными диэлектриком с абсолютной диэлектрической проницаемостью ϵ_a , так относится к проводимости G между теми же телами, если поместить их в среду с электрической проводимостью γ , как ϵ_a относится к γ .

Соотношение (20.15) позволяет по известному выражению емкости между какими-либо телами получить выражение для проводимости или совершить обратную операцию. Так, например, емкость двух-проводной линии

$$C = \frac{\pi \epsilon_a l}{\ln \frac{d}{r}}, \quad (20.16)$$

где l — длина проводов; d — расстояние между осями проводов; r — радиус провода.

Для того чтобы получить выражение для проводимости между двумя параллельными проводами (цилиндрами), погруженными в среду с проводимостью γ , надо в соответствии с (20.15) заменить в (20.16) ϵ_a на γ . Тогда получим

$$G = \frac{\pi \gamma l}{\ln(d/r)}. \quad (20.17)$$

Или другой пример. Емкость коаксиального кабеля (рис. 20.5, а):

$$C = \frac{2\pi \epsilon_a l}{\ln(r_2/r_1)}.$$

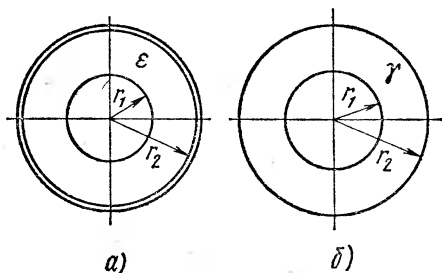


Рис. 20.5

Проводимость между двумя соосными цилиндрами длиной l , которые разделены средой с проводимостью γ (рис. 20.5, б),

$$G = \frac{2\pi \gamma l}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Аналогию можно распространить и на более сложные поля. Например, если в равномерное поле, созданное в среде с проводимостью γ_e , поместить шар с проводимостью γ_i , то в соответствии с (19.67) потенциал внутри шара определим следующим образом:

$$\varphi_i = \varphi_0 + E_0 \frac{3\gamma_e}{2\gamma_e + \gamma_i} z.$$

§ 20.10. Общая характеристика задач расчета электрического поля в проводящей среде и методов их решения. Так же как и задачи электростатики, задачи расчета электрического поля в проводящей среде можно классифицировать по характеру величины, которая определяется в результате расчета, на задачи, в которых определяют точечные характеристики (плотность тока, потенциал), и задачи, в которых находят интегральные характеристики поля, например сопротивление между электродами или напряжение между некоторыми точками.

В зависимости от того, что задано и что определяется, все задачи расчета электрического поля в проводящей среде можно разделить на два основных типа.

В первом типе задач заданы форма и расположение электродов (геометрия поля), свойства среды и интенсивность источников, создающих поле. Требуется найти либо точечные, либо интегральные характеристики поля.

Второй тип задач является обратным по отношению к первому. Одной из задач второго типа может быть, например, следующая: при заданной точечной характеристике поля, заданной форме и расположении электродов и свойствах среды найти интенсивность источников, создающих это поле.

Задачи расчета электрического поля в проводящей среде могут быть решены:

1) непосредственным интегрированием уравнений, описывающих поле (см. примеры 200 и 202);

2) использованием аналитических решений для других статических невихревых полей (см. примеры 204 и 203);

3) экспериментальным (см. § 20.8) или графическим путем; графический метод построения картины поля применительно к плоскопараллельному электростатическому полю рассмотрен в § 19.44, а к плоскомеридианному полю — в § 19.45; изложенная в этих параграфах методика пригодна и для построения картины плоскопараллельного и плоскомеридианного электрического полей в проводящей среде;

4) методом зеркальных изображений, в соответствии с аналогией, рассмотренной в § 20.7, формулы для расчетных токов I_2 и I_3 в задаче, дуальной задаче § 19.32, следуют из формул для τ_2 и τ_3 , если в них ϵ_{1a} заменить на γ_1 , а ϵ_{2a} — на γ_2 . Метод применим и в том случае, когда проводимость $\gamma_2 = 0$.

Применительно к электрическому полю проводящей среды вводят понятия собственных и взаимных проводимостей тел, определяемых по аналогии с собственными и взаимными емкостями тел (частичными емкостями — см. § 19.34);

5) методом конформных преобразований (см. приложение И).

§ 20.11. Расчет электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с токами. Принято считать, что картина электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с токами, тождественна картине электрического поля в условиях электростатики.

Строго говоря, это верно лишь приближенно, так как в условиях электростатики тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности проводящего тела равна нулю, тогда как при протекании постоянного тока по проводнику тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности проводника, хотя и очень мала по сравнению с нормальной составляющей напряженности в той же точке, но не равна нулю. На числовом примере убедимся в том, что тангенциальная составляющая напряженности поля E_t во много раз меньше нормальной составляющей напряженности поля E_n .

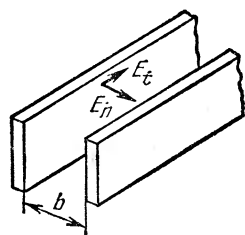


Рис. 20.6

Положим, что разность потенциалов U между двумя параллельными токонесящими медными шинами (рис. 20.6) равна 100 В, расстояние b между шинами 2 см, плотность тока $\delta = 2,5 \cdot 10^6$ А/м², $\gamma = 5,6 \cdot 10^7$ Ом⁻¹·м⁻¹. Тогда $E_t = \delta/\gamma = 4,46 \cdot 10^{-2}$ В/м;

$$E_n = U/b = 5 \cdot 10^3 \text{ В/м}; \quad E_n/E_t \approx 1,12 \cdot 10^5.$$

Пример 199. Определить ток утечки коаксиального кабеля на 1 км длины. Пространство между жилой и оболочкой заполнено неидеальным диэлектриком, который обладает проводимостью $\gamma = 10^{-8}$ Ом⁻¹·м⁻¹. Радиус жилы r_1 , радиус оболочки $r_2 = e r_1$, где e — основание натуральных логарифмов. Напряжение между жилой и оболочкой 10 кВ.

Решение. Ток утечки $I = UG$. Проводимость

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi \cdot 10^{-8} \cdot 10^3}{1} = 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ См.}$$

Ток утечки через несовершенную изоляцию $I = 10^4 \cdot 0,628 \cdot 10^{-4} = 0,628$ А/км.

Пример 200. Рассмотрим простейшую задачу расчета поля заземления. Подвод тока к земле производится с помощью погруженных в землю заземлений. Ток стекает через заземлитель в землю и растекается по ее толще, с тем чтобы собраться у другого электрода заземлителя. Земля выполняет роль обратного провода.

Если погрузить в землю металлическую полусферу, через которую в землю стекает ток I (рис. 20.7), и принять, что второй электрод, к которому будет подтекать ток, находится очень далеко, то плотность тока в земле на поверхности полусферы радиусом R будет $\delta = \frac{I}{2\pi R^2}$ (поверхность сферы $4\pi R^2$, поверхность полусферы $2\pi R^2$). Напряженность поля

$$E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma R^2}.$$

Напряжение между двумя точками на поверхности земли (точки 1 и 2):

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E dR = \frac{I}{2\pi\gamma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = -\frac{1}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

На рис. 20.7 изображена кривая изменения потенциала на поверхности земли.

Найдем напряжение между точками 1 и 2, расположенными на расстоянии, примерно равном шагу человека ($R_1 = 22$ м, $R_2 = 23$ м).

Через заземлитель стекает ток $I = 1000$ А (ток короткого замыкания), проводимость земли $\gamma = 10^{-2}$ Ом⁻¹·м⁻¹:

$$U_{12} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{10^3}{2\pi \cdot 10^{-2}} \left(\frac{1}{22} - \frac{1}{23} \right) \approx 31,9 \text{ В}.$$

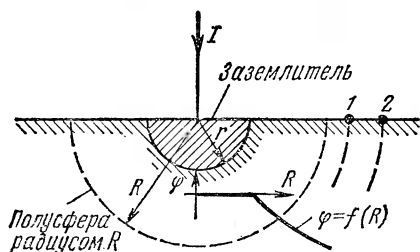


Рис. 20.7

Пример 201. В морскую воду при $\gamma = 0,1$ Ом⁻¹·м⁻¹ вертикально опущены две металлические трубы

наружным диаметром 5 см и длиной 3 м. Найти проводимость G между трубами. Оси труб удалены на расстояние $d = 25$ м.

Решение.

$$G = \frac{\pi \gamma l}{\ln(d/r)} = \frac{\pi \cdot 10^{-1} \cdot 3}{\ln(25/0,025)} = \frac{\pi \cdot 0,3}{6,907} = 0,130 \text{ См}.$$

Пример 202. Вывести формулу для определения проводимости G между плоскостями S_1 и S_2 проводящего тела проводимостью γ , имеющего форму клина (рис. 20.8).

Решение. Проводимость заштрихованного пояска высотой αr , толщиной dr и шириной b :

$$dG = \frac{\gamma b dr}{\alpha r}.$$

Проводимость

$$G = \frac{\gamma b}{\alpha} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\gamma b}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

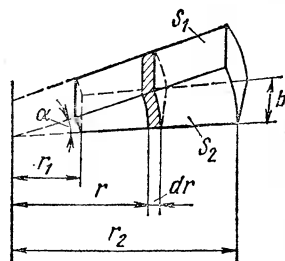


Рис. 20.8

Пример 203. В пластинке из алюминия ($\gamma_e = 3,57 \cdot 10^7$ Ом⁻¹·м⁻¹) создано равномерное электрическое поле напряженностью $E_0 = 0,1$ В/м. Определить плотность тока в медном теле ($\gamma_l = 5,6 \cdot 10^7$ Ом⁻¹·м⁻¹), имеющем цилиндрическую форму и расположенном перпендикулярно полю.

Решение. Воспользуемся формулой (19.72) и аналогией, рассмотренной в § 20.7:

$$E_i = E_v \frac{2\gamma_e}{\gamma_e + \gamma_i} = 10^{-1} \frac{2 \cdot 3,57}{3,57 + 5,6} = 0,78 \cdot 10^{-1} \text{ В/м};$$

$$\delta_i = \gamma_i E_i = 5,6 \cdot 10^7 \cdot 0,78 \cdot 10^{-1} = 435 \cdot 10^4 \text{ А/м}^2.$$

Пример 204. Используя результат примера 195, вывести формулу для определения проводимости заземления, выполненного в виде стальной трубы длиной l , радиусом r , забитой в землю перпендикулярно ее поверхности. Полагать, как и в примере 200, что второй электрод находится в бесконечности, удельная проводимость земли γ , $L/r \gg 1$.

Решение. Картина поля заземлителя показана на рис. 20.9. Труба длиной L , находящаяся в земле, на рисунке дополнена такой же трубой, находящейся в воздухе. Проводимость заземления равна половине проводимости трубы длиной $2L$. В соответствии с примером 195

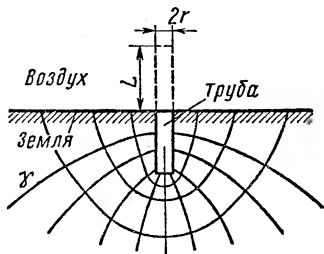


Рис. 20.9

$$G \approx \frac{2\pi\gamma L}{\ln \frac{2L}{r} - 0,307}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Почему уравнение $\vec{\delta} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$ называют обобщенным законом Ома, а также вторым законом Кирхгофа? 2. Почему несправедливо уравнение $\nabla^2 \varphi = 0$ для поля, в котором проводимость γ есть функция координат? 3. Обоснуйте возможность моделирования электростатического поля полем постоянного тока в проводящей среде. 4. Каким образом можно приспособить аналитические решения задач электростатики для решения родственных задач в поле проводящей среды? Приведите примеры. 5. Составьте аналоги трем группам формул Максвелла для поля постоянного тока в проводящей среде. 6. Металлический шарик радиуса R окружен бесконечно протяженной проводящей средой с проводимостью γ ; с шарика в среду стекает ток I (второй электрод в бесконечности); определите энергию в единицу времени, доставляемую источником (ответ: $\frac{I^2}{4\pi\gamma R}$). 7. В неоднородной проводящей среде с проводимостью $\gamma(x, y, z)$ и диэлектрической проницаемостью $\epsilon(x, y, z)$ обеспечивается неизменное распределение плотности тока $\vec{\delta}(x, y, z)$. Определите объемное распределение зарядов $\rho_{\text{своб}}$ (ответ: $\rho_{\text{своб}} = -\frac{\vec{\delta}}{\gamma} \left(\text{grad } \epsilon_a - \frac{\epsilon_a}{\gamma} \text{grad } \gamma \right)$). 8. Решите задачи 20.2; 20.6; 20.8; 20.11; 20.14; 20.17; 20.24.

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 21.1. Связь основных величин, характеризующих магнитное поле. Механические силы в магнитном поле. Магнитное поле постоянного тока это одна из компонент электромагнитного поля, не изменяющегося во времени. Оно создается неизменными во времени токами,

протекающими по проводящим телам, неподвижным в пространстве по отношению к наблюдателю. Хотя при протекании постоянных токов имеется и вторая компонента электромагнитного поля, а именно электрическое поле, но оно во времени не изменяется и потому не влияет на магнитное поле. Благодаря этому магнитное поле постоянного тока можно рассматривать независимо от электрического.

Магнитное поле характеризуется индукцией $\vec{B}$, намагниченностью $\vec{J}$ и напряженностью магнитного поля $\vec{H}$. Эти три величины связаны соотношением:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_a \vec{H}^*, \quad (21.1)$$

где μ_0 — магнитная постоянная, в системе СИ равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; μ — относительная магнитная проницаемость; μ_a — абсолютная магнитная проницаемость.

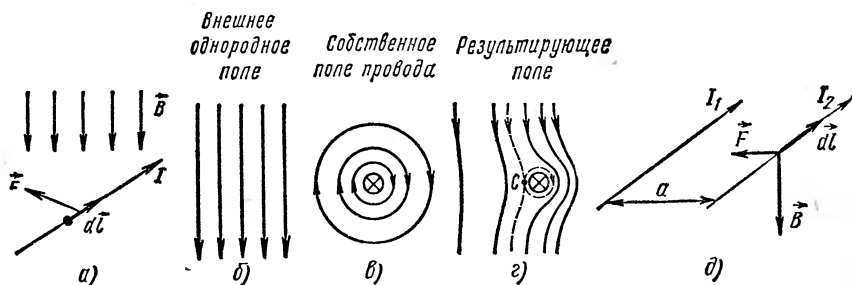


Рис. 21.1

Одним из основных проявлений магнитного поля является воздействие его на проводник с током, помещенный в это поле **. Опыт показывает, что сила $\vec{F}$, с которой магнитное поле действует на элемент проводника длиной $d\vec{l}$ с током I , определяется следующим образом:

$$\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (21.2)$$

Эта сила направлена перпендикулярно индукции в данной точке поля и перпендикулярна элементу тока $I d\vec{l}$ (рис. 21.1, а).

Если индукция $\vec{B}$ и элемент длиной $d\vec{l}$ параллельны, то элемент тока не испытывает механического воздействия со стороны магнитного поля. Механическое воздействие магнитного поля на элемент тока максимально, когда $\vec{B}$ и $d\vec{l}$ взаимно перпендикулярны.

Из (21.2) следует, что индукция — это силовая характеристика поля, определенная при условии, что внесенный в данную точку поля элемент тока $I d\vec{l}$, расположенный перпендикулярно $\vec{B}$, не исказил магнитного поля, существовавшего до внесения в эту точку элемента

* Пояснения к формуле (21.1) см. в § 14.24.

** А в более общем случае воздействие его на движущийся заряд (§ 2.30).

тока. Другими словами, при оговоренном расположении элемента тока индукция численно определяется так —

$$B = \lim \frac{F}{I dl} (I dl) \rightarrow 0.$$

Имея в виду это условие неискажения поля внесением элемента тока, в соответствии с (21.2) говорят также, что индукция может быть определена как сила, действующая на проводник длиной dl , равной единице, если по нему протекает ток I , равный единице.

В СИ единицей измерения индукции является тесла ($1 \text{ Т} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}/\text{м}^2$) в системе CGSM — гаусс — Гс.

Механическое воздействие магнитного поля на ток можно пояснить, исходя из представления о деформации силовых линий магнитного поля или из понятия о силах Лоренца (§ 2.30). Деформация силовых линий иллюстрируется рис. 21.1, б — г. На рис. 21.1 изображены: б — силовые линии равномерного магнитного поля до внесения в него провода с током; в — силовые линии уединенного провода с током; г — силовые линии результирующего поля. Слева от провода силовые линии собственного поля провода направлены встречно силовым линиям внешнего равномерного поля, а справа — согласно с ним. Поэтому результирующее поле слева от провода разрежено, а справа сгущено. Силовые линии, стремясь выпрямиться, производят давление на провод справа налево.

Обратим внимание на то, что силовая линия, показанная пунктиром на рис. 21.1, г, является как бы граничной между силовыми линиями, расположенными справа и слева от провода. В точке с этой линии магнитная индукция равна нулю.

При взаимно перпендикулярном расположении магнитного поля и провода с током направление действия силы часто определяют по мнемоническому правилу, получившему название *правила левой руки*; если расположить левую руку таким образом, что силовые линии будут входить в ладонь, вытянутые пальцы направить по току, то отогнутый большой палец покажет направление действующей силы.

Взаимодействие поля с током имеет место независимо от причин возникновения магнитного поля, в результате ли протекания макро-токов в электрических контурах, или вследствие протекания микро-токов в ферромагнитных материалах, или потока электронов в вакуумном приборе и т. п. Оно наблюдается как в постоянном, так и в изменяющемся во времени поле *.

Пример 205. На рис. 21.1, д изображены два параллельных провода, расстояние между которыми $a = 10$ см. По первому проводу течет ток $I_1 = 1000$ А, по второму $I_2 = 500$ А (направления токов показаны стрелками). Определить силу взаимодействия между проводами на длине 1 м.

Решение. Воспользуемся формулой (21.2). Учтем, что угол между элементом длины второго провода $\vec{dl}$ и индукцией $\vec{B}$ от левого

* В § 21.28 показано, что силу можно определить как производную от энергии магнитного поля по изменяющейся координате контура с током.

провода равен 90° . Поэтому модуль векторного произведения $[\vec{dl} \vec{B}]$ равен $dl B \sin 90^\circ = dl B$.

Магнитная индукция, создаваемая первым проводом в точках, где расположен второй провод, по закону полного тока $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$. Сила

$$F = I_2 \oint dl B = \frac{I_1 I_2 \mu_0 dl}{2\pi a};$$

$$F = \frac{1000 \cdot 500 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{2\pi \cdot 0,1} \approx 1 \text{ Н.}$$

Под действием силы провода стремятся сблизиться.

§ 21.2 Интегральная форма закона полного тока. Количественная связь между циркуляцией вектора $\vec{H}$ по замкнутому контуру и током внутри контура определяется законом полного тока в интегральной форме — линейный интеграл от напряженности магнитного поля

вдоль любого замкнутого контура равен полному току, пронизывающему замкнутый контур:

$$\oint \vec{H} \vec{dl} = I. \quad (21.3)$$

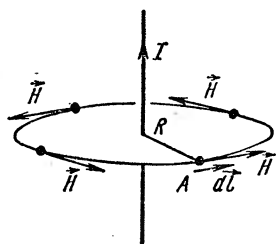


Рис. 21.2

Под *полным током* понимают весь ток (ток проводимости и ток смещения), пронизывающий контур интегрирования.

Интегральную форму закона полного тока применяют, когда может быть использована симметрия в поле. Так, например, напряженность поля в некоторой точке A в поле уединенного прямого провода с током I (рис. 21.2) по закону полного тока определяют следующим образом. Проведем через точку A окружность радиусом R в плоскости, перпендикулярной оси провода, так что центр ее находится на этой оси. В силу симметрии напряженность поля во всех точках окружности численно одна и та же. Направление напряженности совпадает с касательной к окружности. Поэтому

$$\oint \vec{H} \vec{dl} = \oint H dl \cos 0^\circ = H \oint dl = H \cdot 2\pi R = I; \quad H = \frac{I}{2\pi R}.$$

С увеличением радиуса R напряженность магнитного поля убывает по гиперболическому закону.

Если какое-либо поле имеет сложный характер и не удастся составить замкнутый контур, все точки которого находились бы в симметричных условиях, то хотя интегральная форма записи закона полного тока справедлива и для такого контура, использовать ее для нахождения напряженности в любой точке поля так просто не удастся (H нельзя вынести из-под знака интеграла).

§ 21.3. Дифференциальная форма закона полного тока. Соотношение (21.3) пригодно для контура любых размеров, в том числе и для весьма малого.

Выделим в какой-либо среде небольшой контур («жирно» обведен на рис. 21.3) и составим вдоль него циркуляцию вектора $\vec{H}$. Циркуляция напряженности поля вдоль этого контура равна току, пронизывающему обведенную площадь.

Если площадь мала, то можно полагать, что плотность тока $\vec{\delta}$ в пределах этой площади одинакова и тогда ток, пронизывающий площадь, $\Delta i = \vec{\delta} \Delta \vec{S} = \delta_n \Delta S$. Здесь δ_n — проекция вектора плотности тока $\vec{\delta}$ на нормаль к площади, т. е. на направление $\Delta \vec{S}$; $\oint \vec{H} d\vec{l} = \delta_n \Delta S$.

За положительное направление нормали к площади принимают направление движения острия правого винта, головка которого вращается в направлении, принятом за положительное при обходе контура и составлении циркуляции.

Разделим обе части равенства на ΔS и устремим ΔS к нулю. Это будет соответствовать стягиванию рассматриваемой площади к нулю. Предел полученного отношения

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta S} = \delta_n.$$

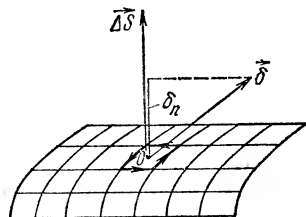


Рис. 21.3

В левой части равенства находится величина, которая является проекцией ротора $\vec{H}$ на направление нормали к площади ΔS . Следовательно, $\text{rot}_n \vec{H} = \delta_n$.

Если площадь ΔS ориентировать в пространстве так, что направление нормали к ней совпадет с направлением вектора плотности тока $\vec{\delta}$ в данной точке поля, то тогда вместо равенства проекций двух векторов ($\text{rot}_n \vec{H}$ и δ_n) можно записать равенство самих векторов

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}. \quad (21.4)$$

Формула (21.4) и представляет собой закон полного тока в дифференциальной форме.

Ротор — это функция, характеризующая поле в рассматриваемой точке в отношении способности к образованию вихрей.

Уравнение (21.4) записано в общей форме, безотносительно к системе координат, и в каждой конкретной системе координат оно раскрывается по-своему.

§ 21.4. Раскрытие выражения $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}$ в декартовой системе координат. Равенство двух векторов $\text{rot } \vec{H}$ и $\vec{\delta}$ означает, что равны проекции их на ось x , проекции на ось y и проекции на ось z . Проекция $\text{rot } \vec{H}$ на ось z равна $\text{rot}_z \vec{H} = \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta S_z}$, проекция вектора $\vec{\delta}$ на ось z есть δ_z и т. д.

На рис. 21.4 в декартовой системе координат изображен малый прямоугольный контур mpq . Обойдем этот контур против часовой

стрелки и составим циркуляцию вектора $\vec{H}$; при ее составлении необходимо учесть изменение вектора $\vec{H}$ от точки к точке. Обозначим проекции $\vec{H}$ на оси x и y в точке m соответственно через H_x и H_y .

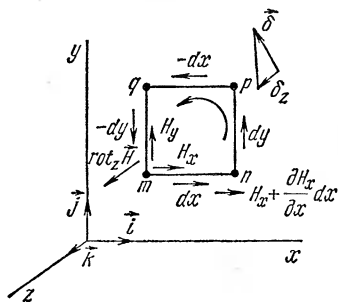


Рис. 21.4

В точке n проекция на ось x изменится по сравнению с проекцией в точке m и будет равной $H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx$; проекция на ось y будет $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx$.

В точке q $H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy$ и $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy$.

В точке p $H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx$ и $H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx$.

При составлении циркуляции на участках mn и pq необходимо принимать во внимание лишь «иксовые» составляющие $\vec{H}$ («игрековые» составляющие перпендикулярны элементу пути).

Составляющую $\oint \vec{H} d\vec{l}$ на участке mn находят как произведение среднего значения «иксовой» составляющей напряженности на этом участке на длину пути dx

$$\frac{H_x + \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \right)}{2} dx = \left(H_x + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \right) dx;$$

на участке np $\left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \right) dy$;

на участке pq $\left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \right) (-dx)$;

на участке qm $\left(H_y + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \right) (-dy)$.

Если просуммировать все составляющие циркуляции вдоль контура $mnpq$, то получим:

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

В соответствии с определением проекции ротора на ось z разделим циркуляцию на площадь $dS_z = dxdy$, после чего проекция ротора на направление оси z :

$$\text{rot}_z \vec{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \delta_z.$$

Аналогично,

$$\text{rot}_x \vec{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \delta_x \text{ и } \text{rot}_y \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \delta_y.$$

Таким образом,

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \quad (21.5)$$

§ 21.5. Запись ротора в виде векторного произведения. Формально $\text{rot } \vec{H}$ можно представить в виде векторного произведения оператора пространственного дифференцирования ∇ на вектор $\vec{H}$, т. е. $\text{rot } \vec{H} = [\nabla \vec{H}]$.

В этом нетрудно убедиться путем непосредственного умножения ∇ на $\vec{H}$:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{i} H_x + \vec{j} H_y + \vec{k} H_z) \right] = \\ & = \vec{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

§ 21.6. Раскрытие $\text{rot } \vec{H}$ в виде определителя в декартовой системе. Ротор любого вектора, используемого в теории электромагнитного поля, можно представить в виде определителя третьего порядка.

Так, $\text{rot } \vec{H}$ в декартовой системе записывают в виде следующего определителя:

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}. \quad (21.6)$$

Непосредственное раскрытие определителя показывает, что получается выражение (21.5).

§ 21.7. Выражение проекций ротора в цилиндрической и сферической системах координат. Без вывода приведем выражение проекций ротора $\vec{H}$:

в цилиндрической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_r \vec{H} &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z}; \\ \text{rot}_\alpha \vec{H} &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}; \\ \text{rot}_z \vec{H} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\alpha) - \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (21.7)$$

в сферической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_R \vec{H} &= \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\alpha) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \alpha} \right]; \\ \text{rot}_\theta \vec{H} &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial H_R}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R H_\alpha); \\ \text{rot}_\alpha \vec{H} &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R H_\theta) - \frac{\partial H_R}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (21.8)$$

§ 21.8. Принцип непрерывности магнитного потока и запись его в дифференциальной форме. Магнитный поток есть поток вектора магнитной индукции через некоторую поверхность: $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$.

Индекс S под знаком интеграла свидетельствует о том, что интеграл взят по поверхности S . Если поверхность замкнута сама на себя (например, поверхность шара), то поток, пронизывающий замкнутую поверхность, $\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}$.

Опыт показывает, что вошедший внутрь любого объема магнитный поток равен магнитному потоку, вышедшему из того же объема.

Следовательно, алгебраическая сумма вошедшего в объем и вышедшего из объема потоков равна нулю:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (21.9)$$

Выражение (21.9) представляет собой математическую запись принципа непрерывности магнитного потока.

Разделим обе части (21.9) на объем V , находящийся внутри замкнутой поверхности S , и найдем предел отношения, когда объем V стремится к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} \cdot d\vec{S}}{V} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (21.10)$$

Соотношение (21.10) можно трактовать как дифференциальную форму принципа непрерывности магнитного потока. Оно пригодно для любой точки магнитного поля. Следовательно, в любой точке этого поля нет ни источника, ни стока линий вектора магнитной индукции. Линии вектора $\vec{B}$ нигде не прерываются, они представляют собой замкнутые сами на себя линии (окружность — пример замкнутой на себя линии).

Но линии $\vec{H}$ в точках, где изменяется $\vec{J}$ (например, на границах сред с разными μ), прерываются. Это следует из (21.10): $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = 0$. Отсюда $\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{J}$. Сопоставьте с прерывностью линий $\vec{E}$ и непрерывностью линий $\vec{D}$ в электрическом поле (см. § 19.39).

§ 21.9. Магнитное поле в областях «занятых» и «не занятых» постоянным током. Вихревыми принято называть поля, ротор которых отличен от нуля. Так как для магнитного поля постоянного тока $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$, то во всех точках пространства, где $\vec{\delta} \neq 0$, поле вектора $\vec{H}$ является вихревым. В областях пространства, где $\vec{\delta} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$, магнитное поле можно рассматривать как *потенциальное*.

§ 21.10. Скалярный потенциал магнитного поля. Для совокупности точек, где $\vec{\delta} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$, магнитное поле можно рассматривать как потенциальное, т. е. как поле, каждая точка которого имеет скалярный магнитный потенциал φ_m . Следовательно, для таких областей можно принять

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m. \quad (21.11)$$

Так как $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0$, то при $\mu_a = \text{const}$ $\operatorname{div} \vec{H} = 0$. Подставив в последнее выражение $-\operatorname{grad} \varphi_m$, вместо $\vec{H}$, получим $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_m = 0$.

Таким образом, скалярный потенциал магнитного поля φ_m , о котором может идти речь только для областей, не занятых током, подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_m = 0. \quad (21.12)$$

Разность скалярных магнитных потенциалов между точками 1 и 2 называют *падением магнитного напряжения* между точками 1 и 2

(см. стр. 352): $U_{m12} = \varphi_{m1} - \varphi_{m2} = \int_1^2 \vec{H} \vec{dl}$.

Падение магнитного напряжения между точками 1 и 2 по какому-то одному пути (например, по пути 132, рис. 21.5, а) равно падению магнитного напряжения между теми же точками по какому-то другому

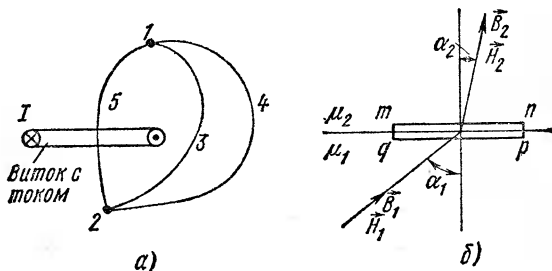


Рис. 21.5

пути (например, по пути 142) в том случае, когда эти пути образуют замкнутый контур, ток внутри которого равен нулю.

Если же замкнутый контур, образованный двумя путями, охватывает некоторый ток, то падение магнитного напряжения по первому пути не равно падению магнитного напряжения по второму пути — они будут различаться на величину тока, охваченного контуром. Последнее вытекает из закона полного тока. Так, применительно к рис. 21.5, а $\int_{132} \vec{H} \vec{dl} \neq \int_{142} \vec{H} \vec{dl}$ (ибо из закона полного тока следует,

что $\int_{132} \vec{H} \vec{dl} + \int_{251} \vec{H} \vec{dl} = -I$, или $\int_{132} \vec{H} \vec{dl} = -I + \int_{152} \vec{H} \vec{dl}$). Следова-

тельно, для того чтобы разность магнитных потенциалов между двумя точками магнитного поля не зависела от пути, надо наложить запрет на прохождение через контур (виток) с током, мысленно натянув на этот контур некоторую пленку. При прохождении через эту пленку φ_m изменяется скачком на величину тока в контуре.

Следует различать понятия «падение магнитного напряжения» и «магнитное напряжение». Первое определяется только линейным интегралом от $\vec{H}$ на $\vec{dl}$ по выбранному пути. Второе — не только этим

интегралом, но и м. д. с., имеющейся на пути (см. стр. 360). Здесь имеется полная аналогия с понятиями «падение напряжения» и «напряжение» в электрической цепи.

§ 21.11. Граничные условия. Подобно тому как в электростатическом поле и в поле проводящей среды выполнялись определенные граничные условия, в магнитном поле также имеют место аналогичные условия:

$$H_{1t} = H_{2t}; \quad (21.13)$$

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (21.14)$$

Условие (21.13) означает, что на границе раздела двух однородных и изотропных сред, различных в магнитном отношении (различные μ), равны тангенциальные составляющие векторов напряженности магнитного поля.

Условие (21.14) свидетельствует о равенстве нормальных составляющих векторов магнитных индукций на границе раздела.

Условие (21.13) выводят путем составления линейного интеграла $\oint \vec{H} d\vec{l}$ по плоскому контуру $mnpq$ (рис. 21.5, б) и приравнивания его нулю (так как он не охватывает тока). Стороны np и qm ничтожно малы по сравнению со сторонами mn и pq . Длину стороны mn и равную ей по величине длину стороны pq обозначим через dl . Тогда $H_1 \sin \alpha_1 dl - H_2 \sin \alpha_2 dl = 0$, но $H_1 \sin \alpha_1 = H_{1t}$, $H_2 \sin \alpha_2 = H_{2t}$, следовательно $H_{1t} = H_{2t}$.

Условие (21.13) не выполняется, если на поверхности раздела двух сред протекает так называемый *поверхностный ток*. Под ним понимают ток, протекающий по бесконечно тонкому плоскому проводнику, помещенному на границе раздела.

В этом случае $\oint \vec{H} d\vec{l}$ будет равняться не нулю, а поверхностному току σdl , который оказался внутри замкнутого контура:

$$H_1 \sin \alpha_1 dl - H_2 \sin \alpha_2 dl = \sigma dl \text{ и в силу этого } H_{1t} - H_{2t} = \sigma.$$

Другими словами, при наличии поверхностного тока с плотностью σ тангенциальная составляющая напряженности поля терпит разрыв. Как правило, поверхностный ток отсутствует, и условие (21.13) выполняется.

Равенство нормальных составляющих векторов магнитной индукции следует из принципа непрерывности магнитного потока: $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$.

Для того чтобы убедиться в справедливости (21.14), на границе раздела выделим небольшой плоский параллелепипед и подсчитаем потоки вектора $\vec{B}$ через нижнюю грань (рис. 21.6) $-B_{1n}\Delta S$ и верхнюю $B_{2n}\Delta S$.

Сумма потоков равна нулю: $-B_{1n}\Delta S + B_{2n}\Delta S = 0$. Следовательно, $B_{1n} = B_{2n}$.

Из (21.13) и (21.14) вытекает соотношение

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_{1a}}{\mu_{2a}}. \quad (21.15)$$

Оно дает связь между углом падения α_1 и углом преломления α_2 (см. рис. 21.5, б). Если магнитные силовые линии выходят из среды с большой магнитной проницаемостью, например $\mu_{1a} = 10^4 \mu_0$, в среду с малой магнитной проницаемостью, например в воздух $\mu_{2a} = \mu_0$, то

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = 10^4 \text{ и } \operatorname{tg} \alpha_2 = 10^{-4} \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Следовательно, угол α_2 много меньше угла α_1 .

Пример 206. Найти угол α_2 , под которым силовые линии выходят в среду с магнитной проницаемостью μ_{2a} , если угол $\alpha_1 = 89^\circ$; $\mu_{1a} = 10^4 \mu_0$, $\mu_{2a} = \mu_0$.

Решение. $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} 89^\circ = 57,29$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg} \alpha_1 = 10^{-4} \operatorname{tg} \alpha_1 = 0,005729$; $\alpha_2 = 20'$.

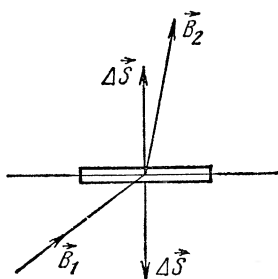


Рис. 21.6

§ 21.12. Векторный потенциал магнитного поля. Для расчета магнитных полей широко используют векторный потенциал, или вектор-потенциал магнитного поля. Его обозначают $\vec{A}$. Это векторная величина, плавно изменяющаяся от точки к точке, ротор которой равен магнитной индукции:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (21.16)$$

Основанием для представления индукции в виде ротора от вектора-потенциала служит то, что дивергенция любого ротора тождественно равна нулю.

Известно, что в магнитном поле $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. Подстановка в это равенство $\operatorname{rot} \vec{A}$ вместо $\vec{B}$ дает выражение, тождественно равное нулю: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$.

Равенство нулю $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}$ можно пояснить с помощью оператора ∇ . С этой целью вместо $\operatorname{rot} \vec{A}$ запишем $[\nabla \vec{A}]$. Тогда $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla [\nabla \vec{A}]$. Векторное произведение $[\nabla \vec{A}]$ перпендикулярно и к ∇ и к $\vec{A}$. Скалярное произведение ∇ на $[\nabla \vec{A}]$, т. е. $\nabla [\nabla \vec{A}]$, равно нулю потому, что равен нулю косинус угла между ∇ и $[\nabla \vec{A}]$.

Если вектор-потенциал как функция координат известен, то индукцию в любой точке поля определяют путем нахождения ротора от вектора-потенциала в соответствии с (21.16). В отличие от скалярного магнитного потенциала φ_m , пользоваться которым можно только для областей, не занятых током (см. § 21.10), векторным потенциалом можно пользоваться как для областей, не занятых током, так и для областей, занятых током.

В электротехнических расчетах векторный потенциал применяют для *двух целей*: 1) определения магнитной индукции с помощью формулы (21.16); 2) определения магнитного потока, пронизывающего какой-либо контур (см. § 21.14).

Векторный потенциал в произвольной точке поля связан с плотностью тока в этой же точке уравнением Пуассона.

§ 21.13. Уравнение Пуассона для вектора-потенциала. Умножим обе части (21.4) на магнитную проницаемость среды μ_a :

$$\mu_a \operatorname{rot} \vec{H} = \mu_a \vec{\delta}.$$

Условимся, что будем иметь дело с полями, которые можно разделить на отдельные области, так что магнитные проницаемости μ_a в каждой отдельной области постоянны. Если μ_a постоянна, то ее можно подвести под знак ротора:

$$\operatorname{rot} \mu_a \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (21.17)$$

В (21.17) вместо $\vec{B}$ подставим $\operatorname{rot} \vec{A}$, тогда

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (21.18)$$

Операция взятия ротора от ротора есть по сути дела операция раскрытия двойного векторного произведения и выполняется так:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = [\nabla [\nabla \vec{A}]] = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (21.19)$$

Из курса математики известно, что двойное векторное произведение раскрывается следующим образом: $[\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]] = \vec{b} (\vec{a} \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \vec{b})$.

В данном случае роль векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ играет оператор ∇ , а роль вектора $\vec{c}$ — вектор-потенциал $\vec{A}$. Таким образом, $[\nabla [\nabla \vec{A}]] = \nabla (\nabla \vec{A}) - \vec{A} (\nabla \nabla) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$.

До сих пор к вектору-потенциалу никаких дополнительных требований не предъявлялось, если не считать того, что он должен быть функцией, имеющей пространственные производные. Так как $\vec{A}$ есть расчетная функция, то в магнитном поле постоянного тока ее можно подчинить требованию:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (21.20)$$

Это требование означает, что линии вектора $\vec{A}$ есть замкнутые сами на себя линии. С учетом (21.20) уравнение (21.19) приобретает вид:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}. \quad (21.21)$$

Уравнение (21.21) представляет собой уравнение Пуассона. В отличие от (19.26), составленного относительно скалярной величины ϕ , уравнение (21.21) составлено относительно векторной величины. Вместо $\vec{A}$ в (21.21) подставим $\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$ и плотность тока заменим на $\vec{i}\delta_x + \vec{j}\delta_y + \vec{k}\delta_z$:

$$\nabla^2 \vec{i}A_x + \nabla^2 \vec{j}A_y + \nabla^2 \vec{k}A_z = -\mu_a \vec{i}\delta_x - \mu_a \vec{j}\delta_y - \mu_a \vec{k}\delta_z.$$

Последнее уравнение разбивается на три уравнения, составленные относительно скалярных величин A_x , A_y , A_z :

$$\nabla^2 A_x = -\mu_a \delta_x;$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_a \delta_y;$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_a \delta_z.$$

Общее решение их по аналогии с решением уравнения (19.26) записывают так:

$$A_x = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_x dV}{R}; \quad (21.22)$$

$$A_y = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_y dV}{R}; \quad (21.22a)$$

$$A_z = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta_z dV}{R}. \quad (21.22б)$$

Если (21.22) умножить на $\vec{i}$, (21.22a) — на $\vec{j}$ и (21.22б) — на $\vec{k}$ и сложить, то получим

$$\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{i}\delta_x + \vec{j}\delta_y + \vec{k}\delta_z) dV}{R},$$

или

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta} dV}{R}. \quad (21.23)$$

Единицей измерения для A является В·с/м.

Формула (21.23) дает общее решение уравнения (21.21). Вектор-потенциал в любой точке поля может быть определен путем вычисления объемного интеграла (21.23). Последний должен быть взят по всем областям, занятым током.

Несмотря на то что формула (21.23) дает общее решение, пользоваться ею в дальнейшем будем редко ввиду того, что взятие интеграла правой части формулы сопряжено обычно со значительными математическими выкладками.

§ 21.14. Выражение магнитного потока через циркуляцию вектора-потенциала. Магнитный поток, пронизывающий какую-либо поверхность S ,

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (21.24)$$

Так как $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, то $\Phi = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$.

На основании теоремы Стокса поверхностный интеграл может быть преобразован в линейный:

$$\int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (21.25)$$

Таким образом,

$$\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (21.26)$$

Другими словами, для определения магнитного потока, пронизывающего некоторую площадь (поверхность) S , необходимо подсчитать циркуляцию вектора потенциала по замкнутому контуру, на котором опирается поверхность S .

Определение потока по (21.26) часто имеет преимущества по сравнению с определением потока через магнитную индукцию по (21.24). Соотношением (21.24) можно пользоваться в том случае, когда известно значение $\vec{B}$ в любой точке поверхности S , тогда как для вычисления потока с помощью соотношения (21.26) достаточно знать значение $\vec{A}$ на контуре и не требуется знание $\vec{A}$ в точках внутри контура.

Переход от $\int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}$ к интегралу $\oint \vec{A} d\vec{l}$ можно пояснить следующим образом.

Разобьем площадь S на элементарные площадки (рис. 21.7). Заменим интеграл суммой и под интегралом вместо $\text{rot } \vec{A}$ подставим в соответствии с определением ротора $\oint \frac{\vec{A} d\vec{l}}{\Delta S}$ (предел опущен), тогда

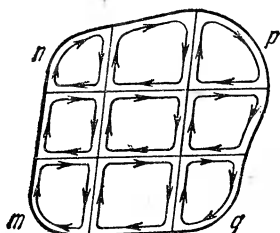


Рис. 21.7

$$\int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} \approx \sum \oint \frac{\vec{A} d\vec{l}}{\Delta S} \Delta S = \sum \oint \vec{A} d\vec{l}.$$

Таким образом, для вычисления $\int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}$ необходимо найти составляющие циркуляции вектора $\vec{A}$ по контурам всех элементарных площадок и затем сложить их. Так как при составлении циркуляции обход участков, являющихся смежными между какими-либо двумя соседними площадками, совершается дважды и притом в противоположных направлениях, то составляющие циркуляции на всех смежных участках взаимно уничтожаются и остается циркуляция только по периферийному контуру $mnpq$:

$$\sum \oint \vec{A} d\vec{l} = \oint_{\text{по контуру } mnpq} \vec{A} d\vec{l}.$$

Рассмотрим граничные условия для векторного потенциала.

Если к плоскому контуру на границе раздела двух сред (подобно изображенному на рис. 21.5, б и у которого размер $nr \rightarrow 0$) применить (21.26) и учесть, что поток через этот контур равен нулю, то получим *граничное условие* для тангенциальной составляющей вектора $\vec{A}$ $A_{1t} = A_{2t}$.

Нормальная составляющая вектора $\vec{A}$ в *постоянном* магнитном поле тоже непрерывна, т. е. $A_{1n} = A_{2n}$. Это следует из того, что для этого поля $\text{div } \vec{A} = 0$.

Но для *переменного* электромагнитного поля $\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ [см. формулу (26.12)], поэтому для синусоидального поля при использовании нормировки Лоренца

$$A_{1n} - A_{2n} = -\frac{j\omega}{c^2} \Phi.$$

§ 21.15. Векторный потенциал элемента тока. Определим величину и направление составляющей векторного потенциала $\vec{A}$, создаваемой током i , протекающим по элементу линейного проводника длиной dl . Пусть расстояние от элемента тока до произвольной точки пространства обозначено через R (рис. 21.8) ($R \gg dl$). В соответствии с общим выражением

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a \vec{\delta} dV}{4\pi R}, \text{ но } \vec{\delta} dV = \vec{\delta} d\vec{S} d\vec{l} = i d\vec{l},$$

где dS — площадь поперечного сечения проводника. Следовательно,

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a i d\vec{l}}{4\pi R}. \quad (21.27)$$

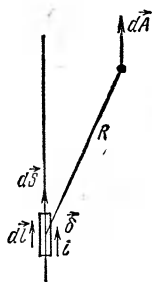


Рис. 21.8

Составляющая векторного потенциала от элемента тока имеет такое же направление в пространстве, как и ток в элементе проводника.

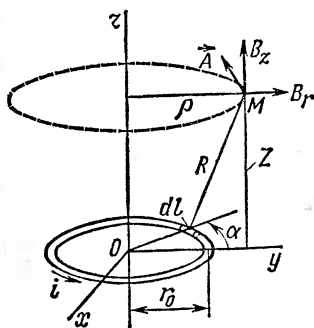


Рис. 21.9

Пример 207. Вывести формулы для определения $\vec{A}$ и $\vec{B}$ в поле кругового витка (рис. 21.9) радиусом r_0 с током i , находящегося в плоскости xy .

Решение. От элемента тока $i d\vec{l}$ (он составляет угол α с осью y) в произвольной точке M , удаленной от оси z на расстояние ρ и на Z от плоскости xy , если полагать, что расстояние R велико по сравнению с линейными размерами поперечного сечения проводника, составляющая векторного потенциала определяется формулой (21.27).

Полное значение

$$\vec{A} = \frac{\mu_a i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{R}.$$

Разложив $d\vec{l}$ на две проекции: $dl_1 = dl \sin \alpha$ и $dl_2 = dl \cos \alpha$ и учитывая, что $dl = r_0 d\alpha$ и что синус — функция нечетная, а косинус — четная, убеждаемся в наличии у $\vec{A}$ только α -компоненты:

$$\vec{A} = \vec{\alpha}_0 A_\alpha = \vec{\alpha}_0 \frac{\mu_a i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \cos \alpha d\alpha}{R};$$

$$R = (Z^2 + r_0^2 + \rho^2 - 2\rho r_0 \cos \alpha)^{1/2};$$

$$A_\alpha = \frac{\mu_a i}{\pi k} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^{1/2} [(1 - 0,5k^2) K - N].$$

Здесь K и N — полные эллиптические интегралы первого и второго рода — функции табулированные:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{(1 - k^2 \sin^2 \beta)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \left(1 + 2a + 9a^2 + 50a^3 + \frac{1225}{4}a^4 + \dots \right).$$

$$N = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \beta)^{1/2} d\beta = \frac{\pi}{2} \left(1 - 2a - 3a^2 - 10a^3 - \frac{175}{4}a^4 - \dots \right)$$

$$k^2 = \frac{4\rho r_0}{(r_0 + \rho)^2 + Z^2}; \quad \beta = \frac{\pi - \alpha}{2}; \quad a = k^2/8.$$

На основании формул (21.16) и (21.7), заменив в них H на A и опустив выкладки, получим проекции индукции $\vec{B}$ в точке M на оси α , r , z цилиндрической системы координат: $B_\alpha = 0$;

$$B_r = \frac{i\mu_a}{2\pi\rho} \frac{Z}{[(r_0 + \rho)^2 + Z^2]^{1/2}} \left[-K + \frac{r_0^2 + \rho^2 + Z^2}{(r_0 - \rho)^2 + Z^2} N \right];$$

$$B_z = \frac{i\mu_a}{2\pi [(r_0 + \rho)^2 + Z^2]^{1/2}} \left[K + \frac{r_0^2 - \rho^2 - Z^2}{(r_0 - \rho)^2 + Z^2} N \right].$$

§ 21.16. Взаимное соответствие электростатического (электрического) и магнитного полей. Между картинami электростатического и магнитного полей постоянного тока в областях, не занятых током, может быть соответствие двух типов.

Первый тип соответствия — когда одинаково распределение линейных зарядов в электростатическом поле и линейных токов в магнитном поле. В этом случае картина магнитного поля (сетка поля) подобна картине соответствующей

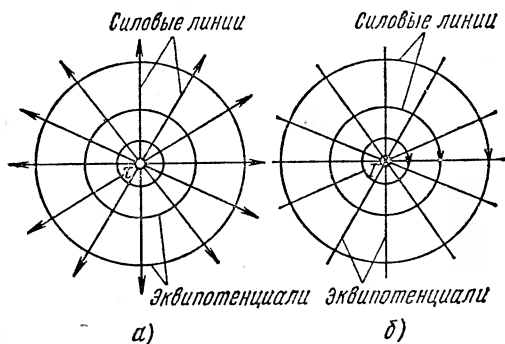


Рис. 21.10

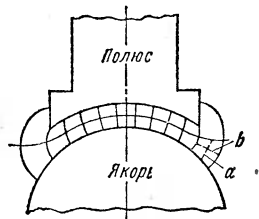


Рис. 21.11

щего электростатического поля. Отличие состоит лишь в том, что силовым линиям электростатического поля отвечают эквипотенциальные линии магнитного поля, а эквипотенциалам электростатического поля соответствуют силовые линии магнитного.

В качестве примера на рис. 21.10, *а* изображена картина электрического поля, образованного уединенным линейным зарядом $+q$, а на рис. 21.10, *б* — картина магнитного поля уединенного проводника с током (для области вне проводника).

Второй тип соответствия — когда одинакова форма граничных эквипотенциальных поверхностей в электростатическом поле и в магнитном поле постоянного тока. В этом случае картина поля оказывается совершенно *одинаковой*.

Соответствие второго типа показано на рис. 21.11. На нем изображена картина магнитного поля в воздушном промежутке между полюсом и якорем машины постоянного тока (обмотки не показаны). Если допустить, что полюс и якорь этой машины используются в качестве электродов некоторого конденсатора, то картина электрического поля в воздушном промежутке между электродами соответствовала бы картине магнитного поля — в обоих случаях силовые ли-

нии выходили бы из полюса и входили бы в якорь нормально к поверхности полюса и якоря.

§ 21.17. Задачи расчета магнитных полей. Рассмотрим некоторые типы задач расчета магнитных полей.

Первый тип задач — определение индуктивности какого-либо контура или взаимной индуктивности двух контуров.

Второй тип задач — определение сил, действующих в магнитном поле на движущийся электрон, неподвижный проводник с током, ферромагнитные массы в магнитном поле.

Третий тип задач — расчет поля, создаваемого заданным распределением токов в пространстве.

Четвертый тип задач — расчет магнитных экранов. *Магнитными экранами* называют устройства, предназначенные для ослабления магнитного поля в заданной области пространства по сравнению с магнитным полем вне экрана. К магнитной экранировке прибегают, например, для защиты чувствительных приборов от влияния посторонних магнитных полей, в частности от влияния магнитного поля Земли.

Пятый тип задач — нахождение распределения токов в некотором объеме для получения заданной картины магнитного поля. Так, например, в морском деле большое значение имеет дегауссировка кораблей: корабль, обладая большой ферромагнитной массой, возмущает магнитное поле Земли не только в непосредственной близости от себя, но и на достаточно большом расстоянии. Соответствующие индикаторы на возмущение магнитного поля Земли могут привести в действие находящиеся поблизости самодвижущиеся мины (имеются в виду условия военного времени), и в результате корабль может оказаться подорванным. Чтобы этого не случилось, на кораблях устанавливают специальные намагничивающие обмотки, которые располагают таким образом, чтобы скомпенсировать возмущение магнитного поля Земли вблизи корабля.

Много различных задач на расчет магнитных полей возникает при магнитной записи звука, а также при магнитной дефектоскопии. Магнитная дефектоскопия позволяет по картине магнитного поля судить о наличии раковин, трещин и других дефектов в изделиях из ферромагнитных материалов. Широко распространена она на железнодорожном транспорте при контроле целостности рельсов железнодорожного пути. Широкое распространение ее объясняется экономичностью и быстротой осуществления контроля.

§ 21.18. Общая характеристика методов расчета и исследования магнитных полей. Методы расчета и исследования магнитных полей можно подразделить на три группы: аналитическую, графическую и экспериментальную.

Группа аналитических методов объединяет все чисто аналитического порядка приемы интегрирования уравнения Пуассона (для областей, занятых током), уравнения Лапласа (для областей, не занятых током), применение методов зеркальных и конформных отображений и др.

В силу трудностей математического характера классические аналитические методы позволяют решать относительно небольшой круг задач.

В тех случаях, когда расчет поля аналитическими методами вызывает затруднения, прибегают к графическому методу построения картины поля или к исследованию магнитного поля на модели. Графические методы построения картины поля применимы к двухмерным безвихревым полям.

За последние годы был развит метод интегральных уравнений (см. приложение 3), предполагающий использование ЭВМ и значительно расширяющий круг решаемых задач.

§ 21.19. Опытное исследование картины магнитного поля. Опытное исследование картины магнитного поля производят различными методами.

Первый метод основан на явлении электромагнитной индукции и состоит в следующем. Плоскую очень малых размеров рамку с намотанной на нее обмоткой помещают в исследуемую область поля и соединяют с баллистическим гальванометром. При коммутации тока в обмотках аппарата (или машины), поле в воздушном зазоре которого исследуется, или при быстром удалении рамки в область, где магнитное поле заведомо слабое (в последнем случае ток в обмотках не переключается), измеряют количество электричества, протекшее по баллистическому гальванометру.

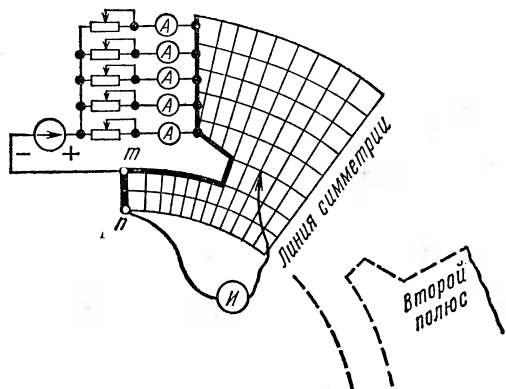


Рис. 21.12

При коммутации тока в обмотках аппарата (или машины), поле в воздушном зазоре которого исследуется, или при быстром удалении рамки в область, где магнитное поле заведомо слабое (в последнем случае ток в обмотках не переключается), измеряют количество электричества, протекшее по баллистическому гальванометру.

и по нему судят о среднем значении индукции в рамке. Затем рамку помещают в другую точку поля и снова определяют индукцию и т. д. Этот метод дает возможность исследовать магнитные поля практически любой конфигурации в пространстве вне ферромагнетиков.

Второй метод исследования безвихревого поля — метод моделирования полями тока в проводящей среде — основан на аналогии между полем в проводящей среде и магнитным безвихревым полем. Он состоит в следующем. Для снятия картины плоскопараллельного поля в воздушном зазоре какого-либо аппарата или машины из листа металла (например, из стального листа) изготовляют увеличенную модель исследуемого участка поля. Так, на рис. 21.12 изображена модель для исследования поля рассеяния между полюсами машины постоянного тока. Так как м. д. с. распределена вдоль полюса, то подвод тока к краю полюса производится от нескольких припаянных

к листу проводов. Токи в них могут регулироваться и этим может задаваться закон распределения м. д. с. по высоте полюса. Отвод тока от линии mn , являющейся эквипотенциальной, производится с помощью массивной проводящей колодки.

Щуп и индикатор I служат для построения эквипотенциалей в поле проводящей среды.

Третий метод — применение датчиков Холла.

Качественное исследование магнитного поля часто производят с помощью стальных опилок, которые насыпают на плоский лист из неферромагнитного материала, помещают в магнитное поле и слегка по листу постукивают. Опилки расположатся вдоль силовых линий. По густоте силовых линий можно качественно судить об интенсивности магнитного поля.

Вместо опилок нередко используют мельчайшие порошки окислов железа, находящихся во взвешенном состоянии в какой-либо жидкости, например керосине. Этот способ широко применяют при магнитной дефектоскопии изделий из ферромагнитных материалов.

§ 21.20. Графическое построение картины поля и определение по ней магнитного сопротивления. Рассмотрим методику графического построения картины плоскопараллельного магнитного поля на конкретном примере.

На рис. 21.11 изображены полюс и якорь машины постоянного тока. Размер, перпендикулярный рисунку, принят достаточно большим — только при этом условии поле можно считать плоскопараллельным.

Так как магнитная проницаемость стали много больше магнитной проницаемости воздуха, то магнитные силовые линии практически перпендикулярны поверхности полюса и якоря. Следовательно, их поверхности являются эквипотенциальными. Построение семейства силовых и эквипотенциальных линий производят «на глаз», руководствуясь следующим: силовые линии должны быть перпендикулярны поверхностям полюса и якоря и так расположены по отношению друг к другу, чтобы после проведения эквипотенциалей образовались криволинейные прямоугольники, для которых *отношение* средней ширины b к средней длине a было приблизительно одинаково для всех прямоугольников. При первом построении это, возможно, не удастся сделать достаточно хорошо, но после нескольких попыток, особенно при наличии некоторого навыка и с учетом симметрии в поле (если она имеется), удастся построить сетку поля так, что $b_1/a_1 = b_2/a_2 = \dots = b_3/a_3 = \dots$

При этом потоки во всех силовых трубках одинаковы. Это облегчает подсчет магнитного сопротивления.

Пусть число криволинейных прямоугольников в силовой трубке равно n , а число трубок — m (для рис. 21.11 $n = 2$ и $m = 11$).

Магнитное напряжение между полюсом и якорем:

$$U_m = \int \vec{H} \vec{dl} \approx H_1 a_1 + H_2 a_2 + H_3 a_3 + \dots = \sum_{k=1}^n H_k a_k.$$

В свою очередь поток в одной силовой трубке:

$$\Delta\Phi = lb_1\mu_a H_1 = lb_2\mu_a H_2 = \dots,$$

где l — размер в направлении, перпендикулярном чертежу; μ_a — магнитная проницаемость воздуха (равна μ_0).

Следовательно,

$$H_1 = \frac{\Delta\Phi}{lb_1\mu_a}, \quad H_2 = \frac{\Delta\Phi}{lb_2\mu_a} \text{ и т. д.}$$

Магнитное напряжение

$$U_m = \frac{\Delta\Phi}{\mu_a l} \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots \right).$$

По построению все слагаемые (a_1/b_1 , a_2/b_2 и т. д.) одинаковы. Число слагаемых равно n . Поэтому

$$U_m = \frac{\Delta\Phi}{\mu_a l} \frac{a}{b} n.$$

Отсюда

$$\Delta\Phi = \frac{U_m \mu_a l b}{na}.$$

Поскольку для всех прямоугольников $b/a \approx \text{const}$, то построения оказались осуществлены так, что потоки $\Delta\Phi$ во всех силовых трубках одинаковы. Полный поток с якоря на полюс

$$\Phi = m \Delta\Phi = U_m \mu_a l \frac{b}{a} \frac{m}{n},$$

где m — число силовых трубок.

Магнитное сопротивление

$$R_m = \frac{U_m}{\Phi} = \frac{an}{\mu_a l b m}. \quad (21.28)$$

Магнитная проводимость

$$G_m = \frac{\mu_a l b m}{an}. \quad (21.29)$$

Графический метод построения картины поля применяют не только для расчета магнитных полей, но и для других безвихревых полей: для расчета электростатического поля и поля постоянного тока в проводящей среде. Так, электрическую проводимость G между двумя телами определяют по формуле (21.30), которую получают из формулы (21.29), заменив μ_a на γ :

$$G = \frac{\gamma l b m}{an}. \quad (21.30)$$

Емкость между двумя телами в плоскопараллельном поле (см. § 19.44):

$$C = \frac{\epsilon_a l b m}{an}. \quad (21.31)$$

§ 21.21. Магнитное экранирование. Положим, что в равномерном магнитном поле напряженностью H_0 надо заэкранировать некоторую область пространства, например цилиндрическую, так, чтобы напряженность поля в ней была во много раз меньше, чем напряженность внешнего поля.

Цилиндрический экран внутренним радиусом a и наружным b имеет относительную магнитную проницаемость μ_2 (рис. 21.13, а). Внутреннюю область обозначим I , область тела экрана — II , область снаружи экрана — III .

В областях I и III относительная магнитная проницаемость равна единице. Так как во всех трех областях нет тока, то магнитное поле в них описывается уравнением Лапласа $\nabla^2 \varphi_m = 0$.

Экран будем полагать достаточно протяженным вдоль оси z (ось z перпендикулярна чертежу); φ_m зависит только от координат r и α цилиндрической системы. Раскроем уравнение $\nabla^2 \varphi_m = 0$ в цилиндрической системе:

$$\nabla^2 \varphi_m = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_m}{r^2 \partial \alpha^2} = 0.$$

Решение его методом Фурье (см. § 19.39) дает: для первой области

$$\varphi_m^I = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \alpha;$$

для второй области

$$\varphi_m^{II} = \left(C_3 r + \frac{C_4}{r} \right) \cos \alpha;$$

для третьей области

$$\varphi_m^{III} = \left(C_5 r + \frac{C_6}{r} \right) \cos \alpha.$$

Постоянная интегрирования, с точностью до которой определяется потенциал, принята здесь равной нулю.

Для определения шести постоянных ($C_1 - C_6$) составим шесть уравнений.

1. Сопоставим φ_m^{III} с выражением «на бесконечности» $\varphi_m = H_0 r \cos \alpha$. Из сопоставления находим, что $C_5 = H_0$.

2. В первой области при $r = 0$ φ_m должно оставаться конечным. Это может быть только в том случае, если в выражении будет отсутствовать слагаемое C_2/r . Оно будет отсутствовать при $C_2 = 0$.

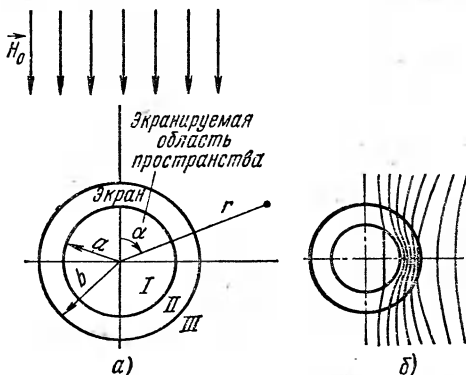


Рис. 21.13

3. Равенство φ_M^I и φ_M^{II} при $r = a$ дает уравнение: $C_1 a = C_3 a + \frac{C_4}{a}$.

Нетрудно убедиться в том, что условие непрерывности потенциала эквивалентно условию равенства тангенциальных составляющих напряженности поля на границе раздела при $r = a$. Действительно *,

$$H_\alpha = -\frac{\partial \varphi_M}{r \partial \alpha}.$$

Следовательно, $H_\alpha^I = -C_1 \sin \alpha$ и $H_\alpha^{II} = -\sin \alpha \left(C_3 + \frac{C_4}{a^2} \right)$.

Таким образом, $C_1 = C_3 + \frac{C_4}{a^2}$.

Последнее уравнение совпадает с полученным ранее.

4. Равенство φ_M на границе между второй и третьей (при $r = b$) областями приводит к уравнению

$$C_5 b + \frac{C_6}{b} = C_3 b + \frac{C_4}{b}.$$

5. Равенство нормальных составляющих индукции: $B_r = -\mu_a \frac{\partial \varphi_M}{\partial r}$ на границе между первой и второй областями (при $r = a$):

$$C_1 = \left(C_3 - \frac{C_4}{a^2} \right) \mu_2.$$

6. Равенство нормальных составляющих индукции при $r = b$ дает уравнение

$$C_5 - \frac{C_6}{b^2} = \left(C_3 - \frac{C_4}{b^2} \right) \mu_2.$$

Совместное решение всех уравнений приводит к выражению потенциала в первой области:

$$\varphi_M^I = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} r \cos \alpha,$$

или при переходе к декартовой системе координат (ось x направлена вверх, $x = r \cos \alpha$):

$$\varphi_M^I = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta} x. \quad (21.32)$$

Здесь

$$q = \frac{2\mu_2}{(1+\mu_2)^2} \approx \frac{2}{\mu_2}, \quad \Delta = b^2 - \beta^2 a^2, \quad \beta = \frac{\mu_2 - 1}{\mu_2 + 1} \approx 1.$$

Напряженность поля в первой области (по модулю):

$$H^I = \frac{\partial \varphi_M^I}{\partial x} = H_0 \frac{2qb^2}{\Delta}. \quad (21.33)$$

* Напомним, что $\vec{H} = -\text{grad } \varphi_M$. Формулы, позволяющие определить H_α и H_r через φ_M , следуют из соотношения (19.9) на стр. 12.

Отношение напряженности поля внутри экрана к напряженности внешнего поля H_0 :

$$\frac{H^I}{H_0} = \frac{2qb^2}{\Delta} \approx \frac{4}{\mu_2} \frac{b^2}{b^2 - a^2}. \quad (21.34)$$

Формула (21.34) приближенна (принято $\beta = 1$ и $q = 2/\mu_2$). Из нее можно заключить, что чем больше μ_2 и чем толще стенка экрана, тем сильнее его экранирующее действие.

На рис. 21.13, б качественно показана картина линий магнитной индукции при наличии экрана. Из рисунка видно, что силовые линии магнитного поля в большинстве стремятся пройти по стенкам экрана и лишь небольшая часть их заходит в экранируемую область.

Пример 208. $\mu_2 = 10^4$; $a = 5$ см; $b = 5,5$ см. Найти отношение H^I/H_0 .

Решение.

$$\frac{H^I}{H_0} = \frac{4}{10^4} \frac{5,5^2}{5,5^2 - 5^2} = 0,0023,$$

т. е. напряженность поля внутри экрана составляет всего 0,23% от напряженности H_0 .

Без вывода запишем формулу для определения отношения напряженности поля внутри сферического экрана H_I к напряженности равномерного поля H_0 , в которое помещен экран, полагая, что внутренний радиус экрана R_1 , наружный R_2 и что экран имеет относительную магнитную проницаемость $\mu_2 \gg 1$, а снаружи экран $\mu_a = \mu_0$:

$$\frac{H_I}{H_0} \approx \frac{1}{1 + \frac{2}{9} \mu_2 \left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right)}.$$

§ 21.22. Эллипсоид во внешнем однородном поле. Коэффициент размагничивания. Поместим в однородное магнитное поле напряженностью H_e ферромагнитный эллипсоид относительной магнитной проницаемостью μ . Поле в нем будет однородным. Напряженность поля в эллипсоиде H_i можно определить на основании принципа наложения как разность напряженности внешнего поля H_e и напряженности поля расчетных магнитных зарядов на поверхности эллипсоида, равной NJ (подобно тому, как в поляризованном диэлектрике поверхностная плотность заряда равна вектору поляризации P — см. § 19.13):

$$H_i = H_e - NJ, \quad (21.35)$$

где N — некоторый коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом размагничивания*.

Оси эллипсоида обозначим a, b, c . Вдоль направления каждой оси свой коэффициент: N_a — вдоль оси a ; N_b — вдоль оси b ; N_c — вдоль оси c . Между ними имеет место зависимость $N_a + N_b + N_c = 1$. Для шара $N_a = N_b = N_c = 1/3$.

Положим, что H_e направлена вдоль оси a , а размеры осей b и c одинаковы, тогда

$$\vec{H}_i = \vec{H}_e - N_a \vec{J}. \quad (21.35')$$

Но из соотношения $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \mu \vec{H}_i$ следует, что

$$\vec{J} = (\mu - 1) \vec{H}_i. \quad (21.36)$$

Подставим (21.36) в (21.35'):

$$H_i = \frac{H_e}{1 + (\mu - 1) N_a}. \quad (21.37)$$

Когда ось a эллипсоида расположена вдоль внешнего поля,

$$N_a = \frac{1-m^2}{m^2} \left(\frac{1}{2m} \ln \frac{1+m}{1-m} - 1 \right), \text{ где } m = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Когда ось a эллипсоида расположена перпендикулярно внешнему полю,

$$N_a = \frac{1+n^2}{n^2} \left(1 - \frac{1}{n} \operatorname{arctg} n \right), \text{ где } n = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}.$$

Вывод формул N_a дан, например, в [17].

§ 21.23. Применение метода зеркальных изображений. Для расчета магнитных полей, создаваемых линейными токами, протекающими вблизи стальных масс, широко применяют метод зеркальных изображений. Допустим, что в воздухе или в какой-либо другой среде с магнитной проницаемостью μ_1 параллельно плоскости раздела сред проходит провод с током I_1 (рис. 21.14, а).

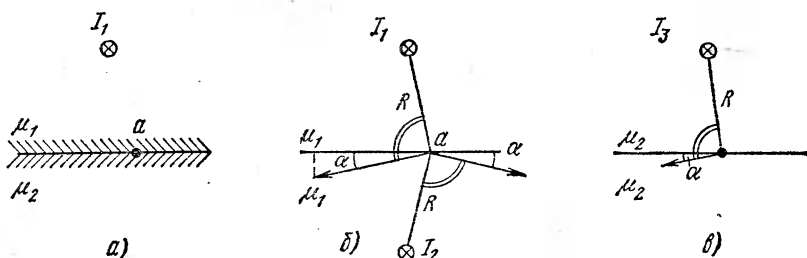


Рис. 21.14

Вторая среда пусть имеет магнитную проницаемость μ_2 . Требуется найти напряженность поля в любой точке первой и второй сред. С этой целью в расчет вводят фиктивные или расчетные токи I_2 и I_3 . Провод с током I_2 помещают зеркально по отношению к проводу с заданным током I_1 , а провод с током I_3 помещают там, где расположен провод с током I_1 .

Двумя пока неизвестными токами I_2 и I_3 распорядимся таким образом, чтобы удовлетворить двум граничным условиям на границе раздела сред.

Поле в верхнем полупространстве (там, где расположен ток I_1 — рис. 21.14, б) определится от двух токов: от заданного I_1 и фиктивного I_2 , причем и верхнее и нижнее полупространства при этом заполняет среда с магнитной проницаемостью μ_1 . Поле в любой точке нижнего полупространства определится током I_3 , а верхнее и нижнее пространства имеют $\mu = \mu_2$ (рис. 21.14, в). Составим уравнения для определения токов I_2 и I_3 . Если взять произвольную точку a на границе раздела сред, то ее можно считать принадлежащей как первой, так и второй средам. Если считать ее принадлежащей первой среде, то тангенциальная составляющая напряженности поля в ней будет

соответствовать левой части уравнения (21.38'), а если второй среде, то правой части (21.38'):

$$\left(\frac{I_1}{2\pi R} - \frac{I_2}{2\pi R}\right) \cos \alpha = \frac{I_3}{2\pi R} \cos \alpha. \quad (21.38')$$

Отсюда получим первую связь между токами: $I_1 - I_2 = I_3$.

Для получения второй связи составим уравнение, выражающее собой равенство нормальных составляющих магнитной индукции в произвольной точке a на границе раздела:

$$\left(\frac{I_2}{2\pi R} + \frac{I_1}{2\pi R}\right) \mu_1 \sin \alpha = \frac{I_3}{2\pi R} \mu_2 \sin \alpha,$$

т. е.

$$I_1 + I_2 = I_3 \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (21.38'')$$

Совместное решение дает:

$$I_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1; \quad I_3 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1.$$

Пример 209. Найти напряженности поля в точках m и n (рис. 21.15, а). Геометрические размеры в сантиметрах даны на рисунке. Магнитные проницаемости $\mu_1 = 1$; $\mu_2 = 999$; $I_1 = 10$ А.

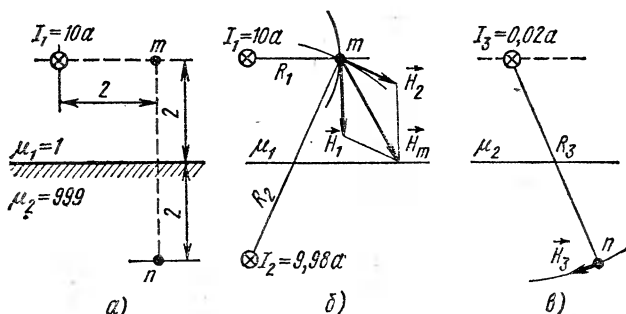


Рис. 21.15

Решение. По формулам § 21.23 находим:

$$I_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1 = 9,98 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_1 = 0,02 \text{ А}.$$

Для определения напряженности поля в точке m , расположенной в том же подпространстве (среде), что и ток I_1 , служит рис. 21.15, б): $\vec{H}_m = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$.

По закону полного тока

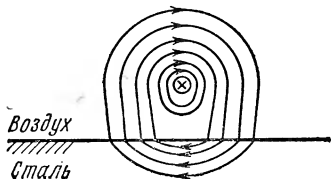
$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi R_1} = \frac{10}{2\pi \cdot 0,02} = 79,5 \text{ А/м};$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi R_2} = \frac{9,98}{2\pi \cdot 4,48 \cdot 10^{-2}} = 35,4 \text{ А/м}.$$

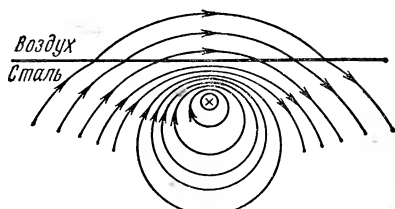
Графическим путем находим $H_m = 101$ А/м. Напряженность поля в точке n (рис. 21.15, в):

$$H_3 = H_n = \frac{I_3}{2\pi R_3} = \frac{0,02}{2\pi \cdot 4,48 \cdot 10^{-2}} = 0,0715 \text{ А/м.}$$

На рис. 21.16, а качественно изображена картина линий магнитной индукции B для случая, когда провод с током проходит в воздухе параллельно поверхности стальной плиты; на рис. 21.16, б — когда провод с током проходит через узкий канал в стальной плите параллельно поверхности плиты.



а)



б)

Рис. 21.16

Пример 210. По длинному биметаллическому проводу (рис. 21.17) протекает постоянный ток I . Радиус внутреннего

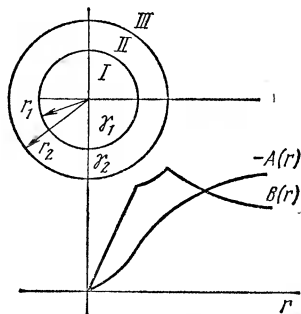


Рис. 21.17

провода r_1 , наружного — r_2 . Проводимость внутреннего γ_1 , наружного — γ_2 . Определить закон изменения векторного потенциала $\vec{A}$ и магнитной индукции внутри провода (во внутренней I и наружной II областях и вне провода — область III).

Решение. Определим плотности тока в первой δ_1 и во второй δ_2 областях. Так как $E_1 = E_2$, то $\delta_1/\gamma_1 = \delta_2/\gamma_2$. Кроме того

$$\delta_1 \pi r_1^2 + \delta_2 (\pi r_2^2 - \pi r_1^2) = I.$$

Следовательно,

$$\delta_1 = \frac{I}{\pi r_1^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)} \text{ и } \delta_2 = \delta_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

При раскрытии выражения $\nabla^2 \vec{A}$ в цилиндрической системе координат учтем, что в данной задаче $\vec{A}$ имеет только одну составляющую

$\vec{A} = \vec{z}^0 A_z = \vec{z}^0 A$, направленную по оси провода (по оси z), и эта составляющая зависит только от r :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = \begin{cases} -\mu_{1a} \delta_1 & \text{для первой области;} \\ -\mu_{2a} \delta_2 & \text{для второй области;} \\ 0 & \text{для третьей области.} \end{cases}$$

Двукратное интегрирование по r дает:

$$A_I = -\frac{\mu_{1a} \delta_1 r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2;$$

$$A_{II} = -\frac{\mu_{2a} \delta_2 r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4;$$

$$A_{III} = C_5 \ln r + C_6.$$

Слагаемое $C_1 \ln r$ должно отсутствовать, так как A не может принимать бесконечно больших значений при $r = 0$; отсюда следует, что $C_1 = 0$.

Вектор-потенциал определяется с точностью до постоянной. Примем эту постоянную равной нулю: $C_2 = 0$. При этом на оси провода $A = 0$. Из граничных условий составим уравнения для определения оставшихся четырех постоянных.

1. При $r = r_1$ $A_I = A_{II}$, следовательно,

$$-\frac{\mu_{1a} \delta_1 r_1^2}{4} = -\frac{\mu_{2a} \delta_2 r_1^2}{4} + C_3 \ln r_1 + C_4.$$

2. При $r = r_2$ $A_{II} = A_{III}$, т. е.

$$-\frac{\mu_{2a} \delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4 = C_5 \ln r_2 + C_6.$$

3. При $r = r_1$ $H_{1r} = H_{2r}$ или $-\frac{1}{\mu_{1a}} \frac{dA_I}{dr} = -\frac{1}{\mu_{2a}} \frac{dA_{II}}{dr}$, т. е.

$$\frac{\delta_1 r_1}{2} = \frac{\delta_2 r_1}{2} - \frac{C_3}{\mu_{2a} r_1}.$$

4. При $r = r_2$ должны быть равны тангенциальные составляющие напряженности поля:

$$\frac{\delta_2 r_2}{2} - \frac{C_3}{\mu_{2a} r_2} = -\frac{C_5}{\mu_{3a} r_2}.$$

Имеем:

$$C_3 = \frac{\mu_{2a} r_1^2}{2} (\delta_2 - \delta_1); \quad -C_5 = \frac{\delta_2 (r_2^2 - r_1^2) + \delta_1 r_1^2}{2} \mu_{3a};$$

$$C_4 = -\frac{\mu_{1a} \delta_1 r_1^2}{4} + \frac{\mu_{2a} \delta_2 r_1^2}{4} - C_3 \ln r_1;$$

$$C_6 = -\frac{\mu_{2a} \delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4 - C_5 \ln r_2.$$

На рис. 21.17 одна кривая характеризует изменение $-A = f(r)$, другая — изменение $B = f(r)$ при $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{5,7}{3,5}$ и $\mu_{1a} = \mu_{2a} = \mu_{3a}$.

Пример 211. Воспользоваться выражением $\Phi = \oint \vec{A} \vec{dl}$ и данными примера 210 и найти магнитный поток, пронизывающий биметаллический провод примера 210 на длине $l = 1$ м.

Решение. Разобьем путь интегрирования $\Phi = \oint \vec{A} \vec{dl}$ на четыре участка: первый участок от точки 1 до точки 2 (рис. 21.18, а); второй — от 2 до 3; третий — от 3 до 4; четвертый — от 4 до 1. В соответствии с этим

$$\oint \vec{A} \vec{dl} = \int_1^2 \vec{A} \vec{dl} + \int_2^3 \vec{A} \vec{dl} + \int_3^4 \vec{A} \vec{dl} + \int_4^1 \vec{A} \vec{dl}.$$

Но $\int_1^2 \vec{A} \vec{dl}$ равен нулю, так как значение $\vec{A}$ при $r = 0$ равно нулю.

На втором и четвертом участках $\int \vec{A} \vec{dl}$ также равен нулю, так как

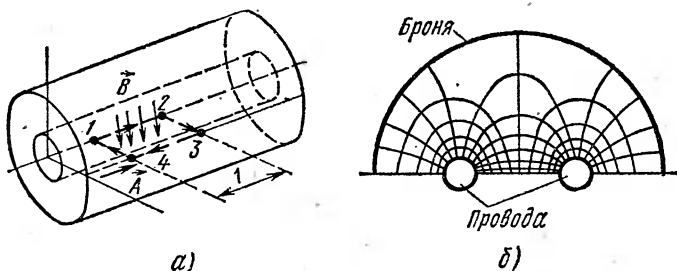


Рис. 21.18

угол между $\vec{A}$ и $\vec{dl}$ равен $\pm 90^\circ$, а $\cos 90^\circ = 0$. $\int \vec{A} \vec{dl}$ не равен нулю только на третьем участке, где

$$A_{r=r_2} = -\frac{\mu_a \delta_2 r_2^2}{4} + C_3 \ln r_2 + C_4,$$

а угол между $\vec{A}$ и $\vec{dl}$ равен 180° ($\cos 180^\circ = -1$). Поэтому

$$\Phi = \int_3^4 \vec{A} \vec{dl} = -A \cdot l.$$

Пример 212. Воспользоваться построениями рис. 21.11 и определить магнитную проводимость воздушного зазора между полюсом и якорем машины постоянного тока на единицу длины якоря (1 м).

Решение. В соответствии с рис. 21.11 $n = 2$ и $m = 11$; $b/a = 0,9$. По формуле (21.29) подсчитаем:

$$G_m = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 0,9 \cdot 11}{2} = 6,63 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$$

Пример 213. Определить емкость и индуктивность на 1 м длины кабельной двухпроводной линии с цилиндрической проводящей броней. Картина поля в сечении кабельной линии дана на рис. 21.18, б ($\epsilon = 2,5$).

Решение. Изображенная на рис. 21.18, б картина поля справедлива для электрического и магнитного полей. Причем, согласно § 21.20, силовым линиям электрического поля соответствуют эквипотенциали магнитного поля.

Число силовых трубок электрического поля $m = 10,5 \cdot 2 = 21$. Число ячеек в трубке $n = 10$ (пять от провода до брони, пять от брони до провода). Отношение $b/a \approx 1$. Число силовых трубок магнитного поля $m = 10$, число ячеек в трубке $n = 21$. По формуле (21.31) найдем емкость на 1 м длины кабеля ($l = 1$ м):

$$C = \frac{2,5 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 21}{10} = 46 \cdot 10^{-12} \text{ Ф.}$$

По определению, индуктивность L равна отношению потокосцепления к создающему его току $L = \psi/I$. В данной задаче имеется всего один виток (прямой и обратный провода). Поэтому потокосцепление ψ равно потоку Φ между проводами (индуктивностью, обусловленной потокосцеплением в теле проводов, в силу его малости пренебрегаем).

По закону полного тока, ток I может быть заменен на $\oint \vec{H} d\vec{l}$ по замкнутому контуру, окружающему провод. В свою очередь $\oint \vec{H} d\vec{l}$ представляет собой падение магнитного напряжения U_m по этому контуру. Следовательно,

$$L = \frac{\psi}{I} \approx \frac{\Phi}{\oint \vec{H} d\vec{l}} = \frac{\Phi}{U_m} = G_m.$$

Таким образом, индуктивность L в данном примере равна магнитной проводимости G_m . Для определения последней воспользуемся формулой (21.29) *:

$$G_m = L = \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10}{21} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн.}$$

Пример 214. Найти разность скалярных магнитных потенциалов (магнитное напряжение) между точками A и B , расположенными в магнитном поле линейного тока $I = 10$ А (рис. 21.19).

Решение.

$$U_{mAB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{l} = \int_{\text{по пути } AmC} \vec{H} d\vec{l} + \int_{\text{по пути } CnB} \vec{H} d\vec{l};$$

$$\int_{\text{по пути } AmC} \vec{H} d\vec{l} = H \int dl = \frac{I}{2\pi R_A} \frac{2\pi R_A}{4} = \frac{I}{4}; \quad \int_{\text{по пути } CnB} \vec{H} d\vec{l} = 0,$$

так как на этом участке угол между $\vec{H}$ и $d\vec{l}$ равен 90° . Следовательно, $U_{mAB} = \frac{I}{4} = 2,5$ А.

* При вычислении L по формуле для G_m число ячеек в силовой трубке должно быть взято по замкнутому контуру.



Рис. 21.19

Пример 215. В воздухе создано равномерное магнитное поле напряженностью $H_0 = 240$ А/м. В это поле поместили ферромагнитный шарик, магнитная проницаемость которого $\mu_i = 20$. Найти индукцию в шарике.

Решение. Воспользуемся аналогией между электростатическим и безвихревым магнитным полями. В формуле (19.69) заменим E_0 на H_0 и ϵ на μ . Получим

$$H_i = H_0 \frac{3\mu_e}{2\mu_e + \mu_i} = 240 \cdot \frac{3 \cdot 1}{2 + 20} = 32,7 \text{ А/м.}$$

Индукция в шарике

$$B_i = 20 \cdot 32,7 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} = 8,21 \cdot 10^{-4} \text{ Т.}$$

Пример 216. Вдоль трубы с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 (рис. 21.20) протекает постоянный ток I . Вывести формулы для определения напряженности поля H внутри трубы, в теле трубы и снаружи трубы.

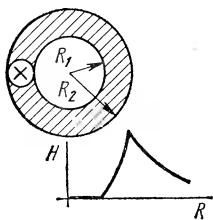


Рис. 21.20

Решение. Напряженность поля в любой из указанных областей найдем по закону полного тока ($R=r$).

Если провести окружность радиусом $r < r_1$ с центром на оси трубы, то эта окружность не охватит тока. Поэтому при $r \leq r_1$ $H = 0$, т. е. во внутренней полости трубы магнитное поле отсутствует. Плотность тока в трубе

$$\delta = \frac{I}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Окружность радиусом $r_1 \leq r \leq r_2$ охватывает ток $\delta \pi (r^2 - r_1^2)$. Поэтому в этом интервале изменений r

$$H = \frac{I (r^2 - r_1^2)}{2\pi r (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Снаружи трубы при $r \geq r_2$ напряженность поля убывает по гиперболическому закону $H = I/(2\pi r)$. График $H = f(r)$ изображен на рис. 21.20.

§ 21.24. Закон Био—Савара—Лапласа. Согласно известному из курса физики закону Био — Савара — Лапласа, при отсутствии ферромагнитных сред отрезок линейного провода $d\vec{l}$, по которому течет ток I в направлении $d\vec{l}$, в точке, удаленной на расстояние R от элемента тока, создает магнитную индукцию, определяемую следующим образом:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \vec{R}_0]}{R^3}, \quad (21.39)$$

где $\vec{R}_0$ — единичный вектор, проведенный от $d\vec{l}$ к точке, в которой определяется магнитная индукция (рис. 21.21). Результирующая индукция в этой точке

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{[d\vec{l} \vec{R}_0]}{R^3}. \quad (21.40)$$

В формуле (21.40) интегрирование производят по всей длине замкнутого контура с током.

Формула (21.39) следует из (21.27), если учесть, что $\vec{d\vec{B}} = \text{rot } \vec{d\vec{A}}$. Действительно, из (21.27) находим $\vec{d\vec{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{rot} \left(\frac{\vec{dl}}{R} \right)$. Но $\frac{1}{R} \vec{dl}$ — это есть произведение скаляра $1/R$ на вектор $\vec{dl}$, поэтому $\text{rot} \left(\frac{1}{R} \vec{dl} \right) = \frac{1}{R} \text{rot } \vec{dl} + \left[\text{grad } \frac{1}{R} \vec{dl} \right]$. Поскольку $\vec{dl}$ не зависит от положения точки, в которой определяется $\vec{B}$, то $\text{rot } \vec{dl} = 0$, и первое слагаемое правой части последней строки выпадает. В соответствии с формулой (19.10) $\text{grad} \left(\frac{1}{R} \right) = \vec{R}_0 \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{R} \right) = \vec{R}_0 \left(-\frac{1}{R^2} \right)$. Следовательно, $\text{rot} \left(\frac{1}{R} \vec{dl} \right) = \frac{[\vec{dl} \vec{R}_0]}{R^2}$ и $\vec{d\vec{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} [\vec{dl} \vec{R}_0]$.

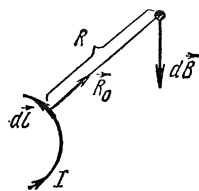


Рис. 21.21

Если в формуле (21.39) ток I как постоянную величину ввести в векторное произведение и заменить $I \vec{dl}$ на $\vec{\delta} dV$, где dV — элемент объема проводника с плотностью тока $\vec{\delta}$, то

$$\vec{d\vec{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{\delta} \vec{R}_0]}{R^2} dV; \quad (21.41)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{\delta} \vec{R}_0]}{R^2} dV. \quad (21.42)$$

Формула (21.41) встречается под названием *закона Ампера*. В формуле (21.42) интегрирование производят по объему, занятому током. Обратим внимание на два положения.

1. Структура формул (21.39) и (21.41) в известной мере сходна со структурой формулы для напряженности электрического поля точечного заряда, полученной в § 19.4 из закона Кулона.

2. Полезно сопоставить закон полного тока с законом Био — Савара — Лапласа. Оба эти закона позволяют определять магнитную индукцию, создаваемую током. Однако закон полного тока применим

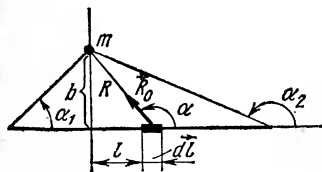


Рис. 21.22

только к замкнутым контурам с токами, тогда как закон Био — Савара — Лапласа применим не только к замкнутым контурам с токами, но и к отрезкам проводников с токами (к элементам тока). Поэтому закон Био — Савара — Лапласа более универсален.

Пример 217. С помощью формулы (21.40) определить магнитную индукцию в точке m , создаваемую отрезком линейного провода с током I (рис. 21.22). Точка m удалена от провода на расстояние b .

Решение. Угол между $\vec{dl}$ и $\vec{R}_0$ обозначим α . Из геометрических соображений имеем

$$R = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad l = -b \cotg \alpha.$$

Следовательно, $dl = \frac{b d\alpha}{\sin^2 \alpha}$;

$$|[\vec{dl} \vec{R}_0]| = dl \cdot 1 \cdot \sin \alpha; \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \sin \alpha d\alpha;$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

При выбранном направлении тока вектор $\vec{B}$ направлен к читателю.

Если провод будет бесконечно длинный, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 180^\circ$, $\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 = 2$ и $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$, что совпадает с результатом, получаемым по закону полного тока.

Индукция в центре квадратного витка с током I и стороной a (рис. 21.23, а) в 4 раза больше, чем от одной стороны и равна $B =$

$$= \frac{\mu_0 I 2\sqrt{2}}{\pi a}. \quad \text{В центре треугольного витка (см. рис. 21.23, б)}$$

$$B = \frac{9}{2} \frac{\mu_0 I}{\pi a}.$$

Пример 218. Вывести формулу для определения напряженности магнитного поля на оси кругового витка с током I (рис. 21.23, в). Радиус витка принять равным a .

Решение. Выделим элемент тока $I d\vec{l}$. Напряженность поля $d\vec{H}'$, создаваемая этим элементом в точке b на оси витка,

находящейся на расстоянии z от плоскости витка, равна $\frac{I [d\vec{l} \vec{R}_0]}{4\pi (a^2 + z^2)}$; напряженность $d\vec{H}'$ перпендикулярна $d\vec{l}$ и $\vec{R}_0$. От диаметрально противоположного элемента тока $I d\vec{l}$ в той же точке b будет напряженность $d\vec{H}''$. По модулю $d\vec{H}'$ и $d\vec{H}''$ одинаковы.

При геометрическом суммировании $d\vec{H}'$ и $d\vec{H}''$ будет получен вектор, направленный по оси витка: $dl = a d\alpha$;

$$H = \int_0^{2\pi} \frac{I a \sin \beta d\alpha}{4\pi (a^2 + z^2)} = \frac{I a}{4\pi (a^2 + z^2)} \frac{a}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{I a^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Пример 219. Используя решение примера 218, вывести формулу для определения индукции на оси цилиндрической катушки с током I (рис. 21.24). Высота катушки h , средний радиус ее a , число витков ω .

Решение. В произвольной точке b на оси от элемента тока dz :

$$dB = \mu_0 \frac{I \omega}{h} dz \frac{a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$\cos \beta = \frac{-z}{(a^2 + z^2)^{1/2}}; \quad -d(\cos \beta) = \frac{a^2 dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$dB = -\frac{\mu_0 I \omega}{2h} d(\cos \beta); \quad B = -\frac{\mu_0 I \omega}{2h} \int_{\beta_1}^{\beta_2} d(\cos \beta) = \frac{\mu_0 I \omega}{2h} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2).$$

§ 21.25. Определение скалярного магнитного потенциала контура с током через телесный угол. На рис. 21.25 изображен контур с током i , который охватывает площадь S . Вертикальная ось расположена перпендикулярно площади. Запишем формулы для магнитного скалярного потенциала (полагая, что на бесконечности $\varphi_m =$

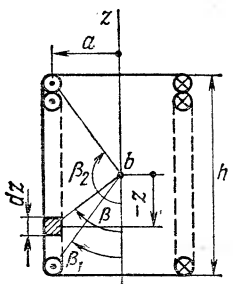


Рис. 21.24

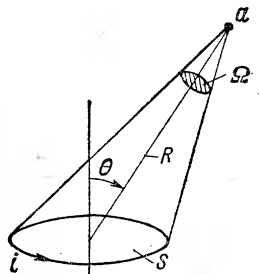


Рис. 21.25

$= 0$) и составляющих H_R и H_θ напряженности поля в произвольной точке a , находящейся на расстоянии R от центра площади. Полагаем, что расстояние R значительно больше линейных размеров контура; θ — угол между вертикальной осью и радиусом R .

Воспользуемся аналогией между электростатическим и магнитным безвихревыми полями. В примере 197 на стр. 65 были выведены формулы для потенциала φ и составляющих E_R , E_θ напряженности электрического поля диполя:

$$\varphi = \frac{ql \cos \theta}{4\pi \epsilon_a R^2}; \quad E_R = \frac{ql \cos \theta}{2\pi \epsilon_a R^3}; \quad E_\theta = \frac{ql \sin \theta}{4\pi \epsilon_a R^3}.$$

Заменим в этих формулах электрический момент ql на магнитный момент $iS\mu_a$, ϵ_a на μ_a , φ на φ_m , E_R на H_R , E_θ на H_θ . Учтем, что $\frac{S \cos \theta}{R^2}$ представляет собой телесный угол Ω , под которым площадь S видна из точки наблюдения a . Получим:

$$\varphi_m = \frac{i\Omega}{4\pi} = \frac{iS \cos \theta}{4\pi R^2}; \quad H_R = \frac{iS \cos \theta}{2\pi R^3}; \quad H_\theta = \frac{iS \sin \theta}{4\pi R^3}.$$

Угол θ положителен, если из точки a ток в контуре виден направленным против часовой стрелки.

§ 21.26. Магнитное поле намагниченной пленки (ленты). Магнитная пленка толщиной в несколько микрон ($2a$ на рис. 21.26) применяется для записи информации (магнитофоны, вычислительные машины). При записи пленку намагничивают с помощью записывающей головки либо продольно, когда вектор намагниченности направлен вдоль пленки (рис. 21.26, а), либо поперечно (рис. 21.26, б). После снятия внешнего поля пленка остается намагниченной и потому, если ее пропустить мимо

считывающей головки, то пересечение силовых линий обмоткой этой головки приведет к наведению в ней э. д. с.

На рис. 21.26, *а* и *б* показаны силовые линии. Намагниченность вдоль оси *x* изменяется. На рисунках области обозначены: выше пленки цифрой 1, самой пленки — 2, ниже пленки — 3. Области 1 и 3 неферромагнитны, область 2 — ферромагнитная среда.

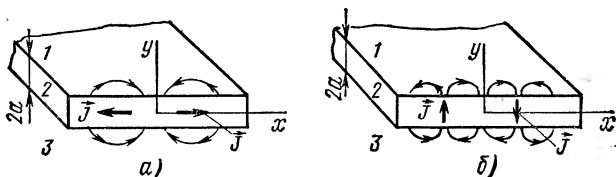


Рис. 21.26

Во всех областях на рис. 21.26, *б* поле подчиняется уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi_m = 0$ ($\text{div } \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0$, так как $J_x = 0$, а J_y зависит только от x); $\vec{H} = -\text{grad } \varphi_m$; $\text{div } \vec{H} = 0$.

Для рис. 21.26, *а* $\nabla^2 \varphi_m = -\text{div } \vec{H} = \text{div } \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x}$; $\vec{H} = -\text{grad } \varphi_m$.

В соответствии с методом Фурье в каждой из областей $\varphi_m = X(x) Y(y)$ (от координаты z поле не зависит).

Задаваясь законом изменения намагниченности, например, для рис. 21.26, *а* в виде $J = J_x = J_0 \sin mx$, а для рис. 21.26, *б* в виде $J = J_y = J_0 \cos mx$, можно получить решение для φ_m . Так, для рис. 21.26, *б*:

$$\varphi_m^I = C_1 e^{-my} \cos mx \quad (y \geq a);$$

$$\varphi_m^{II} = (C_2 e^{-my} + C_3 e^{my}) \cos mx \quad (-a \geq y \geq a);$$

$$\varphi_m^{III} = C_4 e^{my} \cos mx \quad (y \leq -a).$$

Четыре постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 определяют из условия непрерывности φ_m и непрерывности нормальной составляющей магнитной индукции на границе между областями 2 и 1, а также между областями 2 и 3.

§ 21.27. Определение магнитного потока, созданного в некотором контуре намагниченным ферромагнитным телом. Положим, что ферромагнитное тело (например, кусочек ферромагнитной пленки) высотой Δl , площадью поперечного сечения

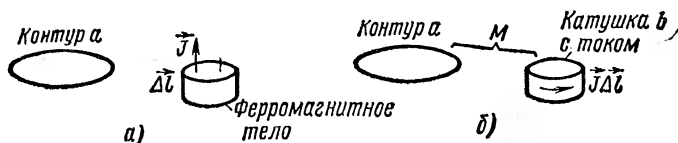


Рис. 21.27

$\Delta \vec{S}$, намагниченностью $\vec{J}$ ($\Delta \vec{S} \parallel \vec{J}$) расположено вблизи контура *a* (рис. 21.27, *а*). Требуется найти поток, создаваемый ферромагнитным телом и пронизывающий контур *a*.

В соответствии с § 14.24 заменим ферромагнитное тело одновитковой эквивалентной катушкой высотой Δl , площадью ΔS , по которой протекает ток $\delta \Delta l = \vec{J} \Delta l$

(магнитный момент катушки равен магнитному моменту ферромагнитного тела, рис. 21.27, б).

Эта катушка с током создает в контуре a потокосцепление, равное произведению тока катушки $\vec{J}\Delta\vec{l}$ на взаимную индуктивность M между контуром a и эквивалентной катушкой b в условиях отсутствия ферромагнетиков: $\psi = \vec{J}\Delta\vec{l}M$. Величина M может быть найдена расчетным или экспериментальным путем.

Если намагниченность тела $\vec{J}$ плавно изменяется по высоте, то тело следует разбить на участки Δl_k со ступенчато изменяющейся $\vec{J}_k$, каждый k — участок тела заменить одновитковой катушкой k со средним по высоте этой катушки током $\vec{J}_k\Delta\vec{l}_k$ и найти

$$\psi = \sum M_k \vec{J}_k, \Delta\vec{l}_k,$$

где M_k — взаимная индуктивность катушки k с контуром a .

§ 21.28. Выражение механической силы в виде производной от энергии магнитного поля по координате. Положим, что в системе из n контуров с токами один из контуров под действием механической силы $\vec{F}$ на него со стороны остальных контуров перемещается так, что координата x его изменяется на величину dx . Требуется выяснить, какая связь существует между силой $\vec{F}$ и изменением энергии магнитного поля системы dW_m .

Для какого-то k -контюра системы запишем уравнение по 2-му закону Кирхгофа:

$$i_k R_k + \frac{d\psi_k}{dt} = e_k. \quad (21.43)$$

Умножим (21.43) на $i_k dt$:

$$i_k^2 R_k dt + i_k d\psi_k = e_k i_k dt.$$

Запишем аналогичные уравнения для остальных контуров и просуммируем их:

$$\sum_{k=1}^n i_k^2 R_k dt + \sum_{k=1}^n i_k d\psi_k = \sum_{k=1}^n e_k i_k dt. \quad (21.44)$$

Слагаемое $\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k$ представляет собой ту часть энергии, которую получают все цепи от источников э. д. с., за вычетом тепловых потерь.

При перемещении какого-то контура на расстояние dx изменяется магнитная энергия системы W_m на величину dW_m и совершается механическая работа Fdx , где F — составляющая силы, действующая по направлению dx .

Из закона сохранения энергии следует, что энергия, доставляемая источниками э. д. с. за время dt , должна равняться энергии, выделяющейся за то же время в виде теплоты в сопротивлениях контура, плюс энергия, которая затрачена на покрытие механической работы Fdx , плюс приращение энергии магнитного поля dW_m :

$$\sum_{k=1}^n i_k^2 R_k dt + F dx + dW_m = \sum_{k=1}^n e_k i_k dt. \quad (21.45)$$

При сопоставлении (21.44) и (21.45) получим

$$\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k = F dx + dW_m. \quad (21.46)$$

Уравнение (21.46) означает, что механическая работа и приращение энергии магнитного поля совершаются за счет той части энергии $\sum_{k=1}^n e_k i_k dt$ источников, ко-

торую последние отдадут в цепи, за вычетом тепловых потерь. Из (21.46) получим:

$$F = \frac{\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k - dW_m}{dx}. \quad (21.47)$$

Из уравнения (21.47) вытекают два частных случая.

1. Если перемещение происходит таким образом, что потокоцепления контуров остаются неизменными, то $d\psi_k = 0$, $Fdx = -dW_m$

$$и \quad F = -\frac{dW_m}{dx}. \quad (21.48)$$

2. Если перемещение происходит так, что токи в контурах остаются неизменными ($i_k = \text{const}$), что возможно, например, когда перемещение происходит настолько быстро, что токи не успевают измениться, то в соответствии с § 2.10 $W_m =$

$= \frac{1}{2} \sum i_k d\psi_k$. Следовательно,

$$dW_m = \frac{1}{2} d \sum i_k \psi_k = \frac{1}{2} \sum i_k d\psi_k. \quad (21.49)$$

Подставим (21.49) в (21.47), получим

$$F = \frac{\sum_{k=1}^n i_k d\psi_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\psi_k}{dx} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\psi_k}{dx} = \frac{dW_m}{dx}. \quad (21.50)$$

Во втором частном случае выражение для механической силы отличается от (21.48) только знаком.

При $i_k = \text{const}$ доставляемая в цепи от источников э. д. с. энергия за вычетом тепловых потерь делится на две равные части. Одна идет на приращение энергии магнитного поля dW_m , другая — на механическую работу Fdx . Уравнения (21.48) и (21.50) часто используют для нахождения механической силы. Чтобы найти силу F , надо либо составить аналитическое выражение для магнитной энергии системы и продифференцировать его по изменяющейся координате, либо опытным путем снять зависимость магнитной энергии от изменяющейся координаты и затем графически продифференцировать ее.

Если в поле двух катушек при изменении координаты индуктивности L_1 и L_2 остаются постоянными и меняется только взаимная индуктивность M , то $F =$

$$= I_1 I_2 \frac{dM}{dx}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение магнитного поля постоянного тока. Какими точечными и интегральными величинами оно характеризуется? 2. Каков физический смысл векторов $\vec{B}$, $\vec{J}$, $\vec{H}$? Каковы единицы измерения их? 3. Какие поля называют вихревыми? 4. В каких случаях величина $\vec{H}$ может быть определена без затруднений при помощи закона полного тока? 5. Дайте физическое толкование понятию ротора. 6. Запишите принцип непрерывности магнитного потока в интегральной и дифференциальной формах. 7. Могут ли линии $\vec{H}$ быть прерывными? 8. Почему понятие Φ_m неприменимо к областям, занятым током? 9. Может ли Φ_m бесконечно близко расположенных точек в поле линейного тока I различаться на конечную величину? 10. Почему вектор-потенциал $\vec{A}$ является более общей характеристикой поля, чем Φ_m ? 11. На каком основании можно принять $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$? 12. Определите характер распределения плотности тока $\vec{j}$ в некоторой области, если в ней $\vec{A} = \vec{i} 5x^3$. Ответ: $\left[\vec{j} = \vec{i} \left(-\frac{30x}{\mu_0} \right) \right]$.

13. Какого типа соответствия могут быть в картинах магнитного и электростатического полей? 14. Поясните ход решения задачи о цилиндрическом магнитном экране и расскажите, из каких соображений находят постоянные интегрирования. 15. Чем можно объяснить, что в соответствующих формулах на метод зеркальных изображений для сходных задач в магнитном (§ 21.23) и электростатическом (§ 19.32) полях индексы 1 и 2 поменялись местами? 16. Почему можно сказать, что закон Био — Савара — Лапласа в некотором смысле является более общим, чем закон полного тока? 17. Ток I проходит по отрезку дуги окружности радиуса a с центральным углом α . Определите H в центре окружности (ответ: $\frac{I\alpha}{4\pi a}$). 18. Решите задачи 21.1; 21.4; 21.12; 21.21; 21.24; 21.25.

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ВТОРАЯ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 22.1. Определение переменного электромагнитного поля. Под *переменным электромагнитным полем* понимают совокупность изменяющихся во времени и взаимно связанных и обуславливающих друг друга электрического и магнитного полей. Оно определяется двумя векторными величинами — напряженностью электрического поля $\vec{E}$ и напряженностью магнитного поля $\vec{H}$.

Переменное электромагнитное поле является одним из видов материи. Оно обладает энергией, массой, количеством движения, может превращаться в другие виды материи и самостоятельно существовать в виде электромагнитных волн. Любые возмущения поля в диэлектрике с огромной скоростью, для вакуума равной примерно $3 \cdot 10^8$ м/с, передаются на большие расстояния.

При исследовании процессов в переменном электромагнитном поле пользуются уравнениями Максвелла.

Систему уравнений Максвелла образуют четыре уравнения*:

1) уравнение (22.1), выражающее связь между ротором напряженности магнитного поля и плотностью тока в той же точке поля, — первое уравнение Максвелла;

2) уравнение (22.4), которое определяет связь между ротором напряженности электрического поля и скоростью изменения магнитного поля в той же точке поля, — второе уравнение Максвелла;

3) уравнение $\text{div } \vec{B} = 0$, выражающее принцип непрерывности магнитного потока [оно следует из (22.4) после взятия от обеих частей его дивергенции];

4) уравнение $\text{div } \vec{E} = \rho_{\text{своб}}/\epsilon_0$, выражающее связь между источником напряженности электрического поля и плотностью свободных зарядов в той же точке поля.

Эту систему дополняют уравнением непрерывности (см. § 22.3) и теоремой Умова — Пойнтинга (см. § 22.6).

* Уравнения были сформулированы английским ученым Д. Максвеллом (1831—1879) в его книге «Трактат об электричестве и магнетизме», изданной в 1873 г.

§ 22.2. Первое уравнение Максвелла. Первое уравнение Максвелла записывают следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (22.1)$$

В правой части его имеются две плотности тока: плотность тока проводимости $\vec{\delta}$ и плотность тока электрического смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Ток электрического смещения возникает в любом диэлектрике, в том числе и в вакууме, при изменении напряженности электрического поля во времени. Ток смещения порождает магнитное поле так же, как и ток проводимости. Хотя природа тока проводимости и тока смещения неодинакова, оба они обладают одним и тем же свойством — вызывать магнитное поле.

Таким образом, смысл первого уравнения Максвелла состоит в том, что всякое изменение электрического смещения во времени $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$ в некоторой точке поля (т. е. возникновение в ней тока смещения) на таких же правах, как и ток проводимости, вызывает в этой точке вихрь магнитного поля ($\operatorname{rot} \vec{H}$), т. е. вызывает вихревое магнитное поле. Если среда однородна и изотропна, то $\epsilon_a = \text{const}$ и тогда

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

С током смещения в предыдущих разделах (особенно в гл. 3 и 8) приходилось встречаться неоднократно. Так, известно, что при зарядке конденсатора через него протекает ток. Этот ток протекает через диэлектрик и является током смещения.

Если, например, взять незаряженный плоский воздушный конденсатор и подключить его к источнику э. д. с. напряжением U через сопротивление R , то напряжение на обкладках конденсатора будет расти по закону $u_C = U \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$. Так как напряженность электрического поля в плоском конденсаторе $E = u_C/d$, где d — расстояние между обкладками; то $E = \frac{U}{d} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$. Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\epsilon_a S}{d}$.

Ток смещения, протекающий через единицу поверхности сечения диэлектрика, взятой перпендикулярно силовым линиям,

$$\epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_a \frac{U}{d} e^{-\frac{t}{RC}} \frac{1}{RC} = \frac{U}{RS} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Через поверхность S ток смещения в S раз больше, т. е. он равен току проводимости, протекающему по проводникам, соединяющим конденсатор с источником э. д. с.

Отметим, что первое уравнение Максвелла представляет собой закон полного тока в дифференциальной форме.

Убедимся в том, что из закона полного тока следует уравнение (22.1). С этой целью возьмем произвольный контур и составим для него уравнение по закону полного тока. Полный ток, пронизывающий площадь, ограниченную контуром, равен сумме тока проводимости и тока смещения. Поэтому

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

На основании теоремы Стокса $\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S}$. Следовательно,

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \int_S \left(\vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (22.2)$$

Равенство (22.2) должно выполняться при любой площади S , поэтому

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

§ 22.3. Уравнение непрерывности. Линии полного тока $\left(\vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ являются непрерывными. Физически это означает, что на границе проводящей среды и диэлектрика ток проводимости переходит в ток смещения.

Можно математически сформулировать *принцип непрерывности (замкнутости) линий полного тока*. С этой целью от обеих частей уравнения (22.1) возьмем дивергенцию. Из предыдущего известно, что дивергенция от ротора тождественно равна нулю (см. § 21.12). Поэтому

$$\text{div} \left(\vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (22.3)$$

Уравнение (22.3) можно записать в другой форме. Действительно, из него следует, что $\text{div } \vec{\delta} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D}$. Но $\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{своб}}$. Поэтому

$$\text{div } \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t}. \quad (22.3')$$

Уравнение непрерывности (22.3') называют также *законом сохранения заряда*. Этот закон означает, что электрический заряд неуничтожаем, он может только перемещаться из одного места в другое.

§ 22.4. Второе уравнение Максвелла. Второе уравнение Максвелла записывают следующим образом:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (22.4)$$

Физический смысл его состоит в том, что всякое изменение магнитного поля во времени $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$ в какой-либо точке поля возбуждает вихрь или ротор электрического поля в той же точке поля, т. е. вызывает вихревое электрическое поле.

Второе уравнение Максвелла представляет собой дифференциальную форму закона электромагнитной индукции.

Для того чтобы убедиться в этом, проведем следующие рассуждения. Мысленно возьмем некоторый замкнутый контур, расположенный в переменном электромагнитном поле. Переменный магнитный поток, пронизывающий контур, наведет в нем э. д. с.

$$e = \oint \vec{E} \, d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Но $\Phi = \int_S \vec{B} \, d\vec{S}$, поэтому

$$\oint \vec{E} \, d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, d\vec{S},$$

причем площадь S опирается на контур l .

На основании теоремы Стокса $\oint \vec{E} \, d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} \, d\vec{S}$, поэтому

$$\int_S \text{rot } \vec{E} \, d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, d\vec{S}. \quad (22.5)$$

Равенство (22.5) должно выполняться при любых площадях S , что возможно только в том случае, когда равны подынтегральные функции обоих интегралов. Следовательно,

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Знак «минус» в правой части второго уравнения Максвелла (как и в формуле $e = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$) объясняется тем, что в основу положено правило правого винта. Если заворачивать правый винт так, что положительное направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ в некоторой точке пространства при возрастании индукции в этой точке совпадет с направлением движения острия винта, то положительное направление для вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ при составлении циркуляции вектора $\vec{E}$ вдоль бесконечно малого контура, окружающего эту точку и лежащего в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$, совпадет с направлением вращения головки винта.

Знак «минус» в правой части (22.4) поставлен для того, чтобы привести в соответствие действительное направление для $\vec{E}$ при оговоренных ранее условиях с направлением, принятым для $\vec{E}$ за положительное.

Как в первом, так и во втором уравнениях Максвелла участвуют частные (не полные) производные во времени. Объясняется это тем, что уравнения Максвелла записаны для таких тел и контуров, которые неподвижны по отношению к выбранной системе координат. (Вопросы электродинамики движущихся сред кратко рассмотрены в § 22.9.)

В переменном электромагнитном поле кроме силовых линий электрического поля, «начинающихся» и «оканчивающихся» на электрических зарядах (как в электростатическом поле) могут быть и замкнутые на себя силовые линии электрического поля, охватывающие замкнутые на себя силовые линии магнитного поля (см., например, рис. 26.5, а).

§ 22.5. Уравнения Максвелла в комплексной форме записи. Уравнения (22.1) и (22.4) записаны для мгновенных значений. Если H и E изменяются во времени синусоидально, то можно воспользоваться символическим методом и записать эти уравнения (22.1) и (22.4) в иной форме. Пусть $H = H_m \sin(\omega t + \psi_H)$ и $E = E_m \sin(\omega t + \psi_E)$.

Можно записать $H = \text{Im } \dot{H}_m e^{j\omega t}$ (Im — мнимая часть) или, условно, $H \rightarrow \dot{H}_m e^{j\omega t}$, где комплексная амплитуда $\dot{H}_m = H_m e^{j\psi_H}$.

В свою очередь $E \rightarrow \dot{E}_m e^{j\omega t}$ ($\rightarrow$ значок соответствия).

Так как напряженности E и H , кроме того, что они меняются во времени по синусоидальному закону, являются функциями векторными, т. е. определенным образом ориентированными в пространстве векторами, то над ними ставят стрелку и точку: $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$.

Стрелка означает, что речь идет о векторе в пространстве, точка — о том, что проекция этого вектора на любую из координатных осей во времени изменяется синусоидально*. Тогда $\vec{\delta}$ можно заменить на $\gamma \dot{\vec{E}} e^{j\omega t}$:

$$\epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \text{на } j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}} e^{j\omega t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} = j\omega \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} \right)$$

и

$$\text{rot } \vec{H} \rightarrow \text{на } \text{rot} [\dot{\vec{H}} e^{j\omega t}] = e^{j\omega t} \text{rot } \dot{\vec{H}}$$

($e^{j\omega t}$ как постоянную величину, не зависящую от координат, можно вынести за знак ротора). При этом первое уравнение Максвелла запишем так:

$$e^{j\omega t} \text{rot } \dot{\vec{H}} = (\gamma \dot{\vec{E}} + j\epsilon_a \omega \dot{\vec{E}}) e^{j\omega t}.$$

После сокращения на $e^{j\omega t}$ получим

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}. \quad (22.6)$$

Аналогично, второе уравнение Максвелла в комплексной форме

$$\text{rot } \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}. \quad (22.7)$$

§ 22.6. Теорема Умова — Пойнтинга для мгновенных значений. Кроме уравнений Максвелла, большое значение в теории электромагнитного поля имеет теорема Умова — Пойнтинга, которая описывает энергетические соотношения в поле.

Теорема Умова — Пойнтинга имеет две формы записи: первая — для мгновенных значений, вторая — комплексная форма — для синусоидально изменяющихся величин.

Из § 19.46 известно, что энергия электрического поля в единице объема равна $\frac{\epsilon_a E^2}{2}$. Энергия магнитного поля в единице объема — $\frac{\mu_a H^2}{2}$. Энергия в объеме dV равна $\left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV$.

* В дальнейшем от амплитудных значений переходим к действующим и индекс m опускаем.

Для того чтобы образовать выражение, в которое вошла бы полная энергия в объеме dV , умножим (22.1) на $\vec{E}dV$, а (22.4) на $\vec{H}dV$. Получим:

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} dV = \left(\gamma \vec{E} \vec{E} + \epsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV = \left(\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right) dV; \quad (22.8)$$

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} dV = \left(-\mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dV = \left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (22.9)$$

Из (22.8) вычтем (22.9). Получим

$$(\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}) dV = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right\} dV. \quad (22.10)$$

Так как $\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}^*$, то левая часть (22.10) есть $-\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] dV$. Следовательно,

$$-\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] dV = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right\} dV.$$

Для сокращения записи обозначим векторное произведение $\vec{E}$ на $\vec{H}$ через $\vec{\Pi}$, т. е. примем, что $\vec{\Pi} = [\vec{E} \vec{H}]$; $\vec{\Pi}$ — это вектор, называемый *вектором Пойнтинга*; размерность его равна произведению размерностей E и H :

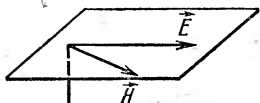


Рис. 22.1

$$[\Pi] = [E][H] = \frac{B}{M} \frac{A}{M} = BA/M^2.$$

Таким образом, вектор Пойнтинга имеет размерность мощности (или энергии в единицу времени), отнесенной к единице поверхности, и направление его (рис. 22.1) совпадает с направлением движения острия правого винта, если головку последнего вращать по кратчайшему направлению от $\vec{E}$ к $\vec{H}$. Следовательно,

$$-\operatorname{div} \vec{\Pi} dV = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right\} dV. \quad (22.11)$$

Распространим (22.11) на некоторый объем конечных размеров. С этой целью проинтегрируем (22.11) по объему V :

$$-\int_V \operatorname{div} \vec{\Pi} dV = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right] dV. \quad (22.11')$$

* Напомним вывод этого соотношения. Введем индексы a и b , указывающие, по какой переменной (A или B) производится дифференцирование, и учтем, что можно в циклическом порядке менять множители. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\vec{A} \vec{B}] &= \nabla_a [\vec{A} \vec{B}] + \nabla_b [\vec{A} \vec{B}] = \vec{B} [\nabla_a \vec{A}] + \vec{A} [B \nabla_b] = \\ &= \vec{B} [\nabla_a \vec{A}] - \vec{A} [\nabla_b \vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}. \end{aligned}$$

Замена $\vec{A}$ на $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на $\vec{H}$ и дает соотношение: $\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}$.

Подобно тому, как поверхностный интеграл по теореме Стокса преобразовывается в линейный (см. § 21.14): $\int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \oint \vec{A} d\vec{l}$, объемный интеграл в свою очередь может быть преобразован в поверхностный. Это преобразование осуществляют с помощью теоремы Остроградского — Гаусса $\int_V \text{div } \vec{P} dV = \oint_S \vec{P} d\vec{S}$.

Качественно поясним это преобразование. Разобьем объем V (рис. 22.2) на отдельные объемы ΔV , заменим $\text{div } \vec{P}$ на $\frac{\Sigma \vec{P} \Delta \vec{S}}{\Delta V}$ (строго говоря, надо было бы записать

$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{P} \Delta \vec{S}}{\Delta V}$), где $\Delta \vec{S}$ — элемент поверхности объема ΔV , а знак Σ означает суммирование по всем поверхностям объема ΔV . Тогда

$$\int_V \text{div } \vec{P} dV = \Sigma \Sigma \frac{\vec{P} \Delta \vec{S}}{\Delta V} \Delta V = \Sigma \Sigma \vec{P} \Delta \vec{S}.$$

Первый знак суммы означает суммирование по поверхностям малого объема, а второй — по отдельным объемам.

Сумма $\Sigma \Sigma \vec{P} \Delta \vec{S}$ может быть разбита на две суммы: на сумму выражений $\vec{P} \Delta \vec{S}$ по всем поверхностям, отделяющим один объем от соседнего (по «внутренним» поверхностям), и на сумму $\vec{P} \Delta \vec{S}$ по всем «периферийным» поверхностям. Первая сумма равна нулю, так как для двух смежных объемов внешние нормали к общей поверхности направлены встречно. Рис. 22.3 поясняет это; mn — общая грань двух объемов. Для верхнего объема нормаль к грани направлена вниз ($\Delta \vec{S}_1$), для нижнего — вверх ($\Delta \vec{S}_2$); вектор $\vec{P}$, будучи умноженным на $(\Delta \vec{S}_1 + \Delta \vec{S}_2)$, даст нуль. Сумма $\vec{P} \Delta \vec{S}$ по всем периферийным поверхностям и представляет собой $\oint \vec{P} d\vec{S}$.

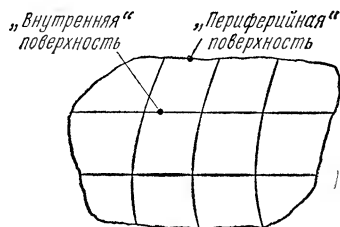


Рис. 22.2

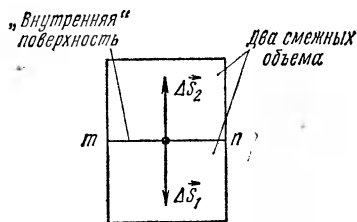


Рис. 22.3

Теорему Умова — Пойнтинга для мгновенных значений записывают следующим образом:

$$-\oint_S \vec{P} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (22.12)$$

Левая часть (22.12) представляет собой поток вектора Пойнтинга (направленный внутрь объема) сквозь любую замкнутую поверхность S , ограничивающую некоторый объем V .

Поясним смысл знака «минус» в левой части формулы (22.12).

Элемент поверхности $d\vec{S}$ в любой ее точке направлен в сторону внешней по отношению к рассматриваемому объему нормали. Вектор Пойнтинга $\vec{P}$ направлен

внутри этого объема. Поскольку угол между $\vec{P}$ и $d\vec{S}$ больше 90° , то скалярное произведение $\vec{P}d\vec{S} < 0$, а $-\vec{P}d\vec{S} > 0$. Таким образом, за счет знака «минус» левая часть формулы (22.12) — величина положительная.

В соответствии с уравнением Джоуля — Ленца в дифференциальной форме γE^2 есть энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единице объема в единицу времени.

Поэтому $\int_V \gamma E^2 dV$ есть энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единицу времени в объеме V ; $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right)$ есть скорость изменения запаса электромагнитной энергии в единице объема.

Но скорость изменения электромагнитной энергии есть мощность. Следовательно, поток вектора Пойнтинга сквозь любую замкнутую поверхность, ограничивающую объем V , равен мощности, выделяющейся в объеме V в виде теплоты, и мощности, идущей на приращение энергии электромагнитного поля.

*Теорему Умова — Пойнтинга * следует трактовать как уравнение энергетического баланса;* левая часть (22.12) есть мощность или энергия в единицу времени, доставляемая в виде потока вектора Пойнтинга внутрь некоторого объема; правая часть (22.12) есть энергия, расходуемая в единицу времени внутри объема.

Соотношение (22.12) было получено в предположении, что среда внутри объема V однородна и изотропна, а также в предположении, что отсутствует отраженная волна и внутри объема нет источников электродвижущей силы.

Если поле не изменяется во времени, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) = 0 \quad \text{и} \quad - \oint \vec{P} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV.$$

Обратим внимание также на то, что формула (22.12) учитывает возможность прохождения потока вектора $\vec{P}$ транзитом через объем V .

Электромагнитная энергия от места ее генерирования передается к месту потребления по диэлектрику (*провода же в линиях передачи выполняют двойную роль*: они являются каналами, по которым проходит ток, и организаторами структуры поля в диэлектрике).

Покажем справедливость этого утверждения на простейшем примере. Пусть энергия постоянного тока передается по коаксиальному кабелю (рис. 22.4). Радиус жилы r_1 , внутренний радиус оболочки r_2 . Примем проводимость материала жилы и оболочки настолько большой (теоретически бесконечно большой), что напряженности поля $E = \delta/\gamma$ в жиле и оболочке стремятся к нулю. Пространство между жилой и оболочкой заполнено диэлектриком.

* Н. А. Умов (1846—1915) с 1893 по 1911 г. являлся профессором Московского университета. В 1874 г. защитил докторскую диссертацию «О движении энергии в упругих средах», где рассмотрен вопрос о потоке энергии в упругих средах и о плотности потока энергии. Применительно к электромагнитному полю понятие о потоке энергии было развито английским физиком Пойнтингом в 1885 г.

Убедимся, что энергия, передаваемая приемнику в единицу времени, равная UI , действительно канализируется по диэлектрику.

С этой целью подсчитаем поток вектора Пойнтинга через поперечное сечение диэлектрика, в рассматриваемом примере представляющее собой кольцо с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2 . Напряженность магнитного поля в диэлектрике, по закону полного тока:

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Напряженность электрического поля в диэлектрике при постоянном токе определяется так же, как и в условиях электростатики:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a r l} = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}},$$

где Q — полный заряд жилы на длине l ; U — напряжение между жилой и оболочкой.

Следовательно, в некоторой точке диэлектрика, расположенной на расстоянии r от оси ($r_1 \leq r \leq r_2$),

$$P = EH = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

($\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны; см. рис. 22.4). Поток вектора Пойнтинга через кольцо с радиусами r_1 и r_2 :

$$\int \vec{P} d\vec{S} = \int_{r_1}^{r_2} P 2\pi r dr = 2\pi \frac{UI}{2\pi \ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = UI.$$

Таким образом, вся поступающая к приемнику энергия действительно передается по диэлектрику. По жиле и оболочке энергия к приемнику не передается. Более того, если учесть, что γ конечна и напряженность электрического поля в жиле и оболочке направлена по току и не равна нулю, то нетрудно убедиться в наличии потока вектора Пойнтинга через боковую поверхность провода внутрь провода, т. е. провода сами потребляют из диэлектрика энергию на покрытие тепловых потерь.

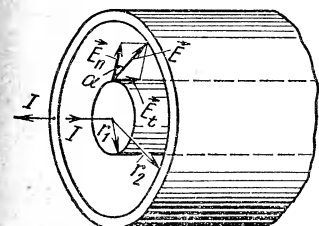


Рис. 22.5

Пример 220. Определить тангенс угла α , составляемого напряженностью электрического поля с нормалью к поверхности жилы в точке, принадлежащей поверхности

жилы коаксиального кабеля (рис. 22.5), а также подсчитать величину потока вектора Пойнтинга через боковую поверхность жилы на длине в 1 м и сопоставить величину потока вектора Пойнтинга с потерями энергии в жиле на длине в 1 м. Радиус медной жилы $r_1 = 0,3$ см;

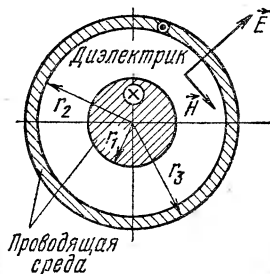


Рис. 22.4

внутренний радиус оболочки $r_2 = 1$ см. Протекающий по кабелю постоянный ток $I = 50$ А. Напряжение между жилой и оболочкой $U = 10$ кВ.

Решение. Нормальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности жилы:

$$E_n = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{10^4}{0,003 \cdot \ln \frac{1}{0,3}} = 2,77 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

Тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности жилы по закону Ома:

$$E_t = \frac{I}{\pi r_1^2 \gamma} = \frac{50}{\pi \cdot 0,003^2 \cdot 5,8 \cdot 10^7} = 3,05 \cdot 10^2 \text{ В/м.}$$

Вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ составляет с нормалью к поверхности жилы угол α (см. рис. 22.5), тангенс которого:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_t}{E_n} = 1,1 \cdot 10^{-7}.$$

Напряженность магнитного поля на поверхности жилы, по закону полного тока,

$$H = \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{50}{2\pi \cdot 0,003} = 2650 \text{ А/м.}$$

Для определения величины потока вектора Пойнтинга внутрь жилы на длине в 1 м следует умножить составляющую вектора Пойнтинга $E_t H$, проникающую внутрь жилы, на величину боковой поверхности жилы на длине в 1 м:

$$E_t H \cdot 2\pi r_1 \cdot 1 = 3,05 \cdot 10^2 \cdot 2650 \cdot 2\pi \cdot 0,003 \cdot 1 = 1,523 \text{ Вт.}$$

Эта величина равна потерям энергии в жиле кабеля на длине в 1 м

$$I^2 R = I^2 \frac{l}{\gamma S} = 50^2 \frac{1}{5,8 \cdot 10^7 \pi \cdot 0,003^2} = 1,523 \text{ Вт.}$$

Пример 221. На рис. 22.6, *a* и *b* изображен сердечник трансформатора и один виток, окружающий сердечник. Концы витка обозначены *a* и *b*. Намагничивающая обмотка трансформатора на рисунке не показана. По сердечнику проходит синусоидально изменяющийся во времени магнитный поток $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$. Поток вне сердечника отсутствует. К концам витка *a* и *b* присоединим вольтметр электродинамической системы с сопротивлением R_V один раз в соответствии с рис. 22.6, *a*, другой по рис. 22.6, *б*. Определим показание вольтметра в этих двух случаях, полагая, что активное сопротивление самого витка $R_B \ll R_V$ и что индуктивность рассеяния витка L_S ничтожно мала.

Обозначим ток в контуре *i* и для рис. 22.6, *a* составим уравнение по второму закону Кирхгофа $iR_B + iR_V + L_S \frac{di}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} = 0$.

Пренебрегая слагаемыми iR_B и $L_S \frac{di}{dt}$ по сравнению с iR_V и $\frac{d\Phi}{dt}$, обозначив $iR_V = \dot{U}_V$, найдем показание вольтметра в схеме рис. 22.6, *a* $U_V = \frac{\omega \Phi_m}{\sqrt{2}}$. В схеме рис. 22.6, *б* вольтметр покажет нуль. Это можно пояснить двояко. 1. Провода, идущие

щие от точек a и b витка к вольтметру на рис. 22.6, б, образуют второй виток, в котором изменяющимся магнитным потоком наводится такая же э. д. с., что и в основном витке (см. рис. 22.6, в). При обходе контура, состоящего из двух витков, убеждаемся, что суммарная э. д. с. в контуре равна нулю. 2. Такой же вывод сделаем, если учтем, что суммарный поток, пронизывающий заштрихованную площадь контура рис. 22.6, в, равен нулю (поток вне сердечника по условию отсутствует).

Рассмотренный пример свидетельствует о том, что при измерениях в переменном электромагнитном поле показание вольтметра зависит от того, как расположены провода от вольтметра до объекта измерения.

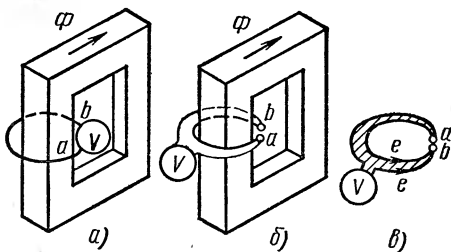


Рис. 22.6

§ 22.7. Теорема Умова — Пойнтинга в комплексной форме записи.

Перед тем как записать теорему Умова — Пойнтинга в комплексной форме, рассмотрим вопрос о полной мощности в цепи переменного тока. Полная мощность $\hat{S} = \dot{U}\dot{I}^* = P + jQ$.

Пусть цепь переменного тока содержит последовательно соединенные активные сопротивления R , индуктивность L и емкость C .

Тогда реактивная мощность

$$Q = I^2 X = I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \omega \left[I^2 L - I^2 \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 C \right] = 2\omega (\omega_m - \omega_э).$$

Здесь

$$\omega_m = \frac{LI^2}{2} \quad \text{и} \quad \omega_э = \frac{CU_C^2}{2},$$

где U_C — напряжение на конденсаторе.

Таким образом, реактивная мощность Q равна разности между магнитной ω_m и электрической $\omega_э$ энергиями цепи, умноженной на 2ω . Подобно тому как в цепи переменного тока для вычисления полной мощности $\hat{S}$ надо умножить комплекс напряжения $\dot{U}$ на сопряженный комплекс тока $\dot{I}^*$, вводится в употребление комплексный вектор Пойнтинга

$$\tilde{\vec{P}} = \left[\dot{\vec{E}} \vec{H}^* \right].$$

Вместо — $\oint \vec{P} d\vec{S}$ теперь будет

$$-\oint \tilde{\vec{P}} d\vec{S} = -\int_V \operatorname{div} \tilde{\vec{P}} dV = \int_V \left(\dot{\vec{E}} \operatorname{rot} \vec{H}^* - \vec{H} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} \right) dV.$$

В соответствии с (22.6) и (22.7)

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}$$

и

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}.$$

Следовательно, $\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} - j\omega \epsilon_a \vec{E}$ и

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} &= \gamma \dot{\vec{E}} \vec{E} - j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}} \vec{E} + j\omega \mu_a \vec{H} \dot{\vec{H}} = \\ &= \gamma E^2 + 2j\omega \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$-\oint \vec{H} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV + j2\omega \int \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\epsilon_a E^2}{2} \right) dV. \quad (22.13)$$

Первое слагаемое правой части (22.13) представляет собой активную мощность, второе — реактивную. Таким образом, теорему Умова—Пойнтинга можно записать еще следующим образом:

$$-\oint \vec{H} d\vec{S} = P + jQ.$$

В таком виде ее часто используют для определения активного и внутреннего реактивного сопротивлений проводников на переменном токе (подробнее см. § 23.7).

§ 22.8. Некоторые замечания к § 22.1. Первое замечание. В уравнения Максвелла входят параметры ϵ_a , γ , μ_a , характеризующие усредненные в пространственном и временном смысле свойства вещества. При низких частотах эти параметры представляют собой действительные (некомплексные) числа — такими и будем их считать в курсе ТОЭ. При высоких частотах в диэлектриках существенную роль начинают играть диэлектрическая вязкость и другие процессы.

В ферромагнитных веществах резко сказываются явления гистерезиса, магнитной вязкости и ряд других. В силу этих причин ϵ , γ и μ оказываются функциями частоты и комплексами*.

Убедимся в том, что вязкостные процессы при поляризации диэлектриков с полярными молекулами приводят к тому, что ϵ становится комплексным числом.

Обозначим E_n — напряженность поля, обусловленную приложенным к конденсатору напряжением u ; например, для плоского конденсатора с расстоянием d между обкладками $E_n = u/d$; E_d — действующая на диполи полярных молекул напряженность поля, вызывающая их поворот.

За счет вязкостных процессов при поляризации (повороте) полярных молекул $E_d < E_n$ на величину, пропорциональную скорости поляризации:

$$E_d = E_n - k_1 \frac{dP}{dt}, \quad (22.14)$$

где k_1 — некоторый коэффициент.

$$\text{Но } P = k_2 E_d, \text{ поэтому } E_d + k \frac{dE_d}{dt} = E_n, \text{ где } k = k_1 k_2.$$

При нулевых начальных условиях $E_d = E_n \left(1 - e^{-\frac{t}{k}} \right)$. Коэффициент k называют *постоянной времени релаксации*.

* Зависимость параметров веществ от частоты впервые была обнаружена русским ученым В. К. Аркадьевым в 1908—1911 гг. Физическое объяснение этим явлениям было дано им в 1913 г. в работе «Теория электромагнитного поля в ферромагнитном металле».

При переменном токе частотой ω :

$$\dot{E}_d = \frac{\dot{E}_n}{1 + j\omega k}; \quad \dot{P} = k_2 \dot{E}_d = \frac{k_2 \dot{E}_n}{1 + j\omega k}$$

и

$$\dot{D} = \epsilon_0 \dot{E}_n + P = \dot{E}_n \frac{\epsilon_0 (1 + j\omega k) + k_2}{1 + j\omega k}.$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость $\tilde{\epsilon} = \frac{\dot{D}}{\dot{E}_n} = \epsilon' - j\epsilon''$,

$$\text{где } \epsilon' = \frac{(\epsilon_0 + k_2) + \omega^2 k \epsilon_0}{1 + (\omega k)^2}; \quad \epsilon'' = \frac{\omega k k_2}{1 + (\omega k)^2}.$$

Из формул видно, что ϵ' и ϵ'' являются функциями частоты.

Мгновенное значение плотности тока через диэлектрик, у которого проводимость

$$\gamma \neq 0 \quad \vec{\delta}_{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad \text{При переменном токе частотой } \omega:$$

$$\dot{\delta}_{cm} = j\omega \dot{D} = j\omega \dot{E}_n (\epsilon' - j\epsilon'') = \omega \dot{E}_n (\epsilon'' + j\epsilon').$$

Мгновенное значение полной плотности тока через несовершенный диэлектрик

$$(\gamma \neq 0) \quad \vec{\delta}_n = \gamma \vec{E}_n + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

При переменном токе частотой ω :

$$\dot{\delta} = (\gamma + \omega \epsilon'') \dot{E}_n + j\omega \epsilon' \dot{E}_n.$$

Первое слагаемое правой части находится в фазе с приложенным напряжением, второе на 90° его опережает. Тангенс угла потерь несовершенного диэлектрика (см.

§ 3.9) $\text{tg } \alpha = \frac{\epsilon'' + \gamma/\omega}{\epsilon'}$. Используя уравнение (16.34) § 16.8 для вязкостных процессов в ферромагнетиках, можно вывести аналогичные формулы и для комплексной магнитной проницаемости в предположении, что вихревые токи отсутствуют.

Заметим, что дифференциальное уравнение, описывающее процесс зарядки конденсатора с вязким диэлектриком через сопротивление R от источника постоянной э. д. с., если учесть вязкостные процессы по уравнению (22.14), будет иметь второй (не первый!) порядок.

Второе замечание. В § 22.2 рассматривалось первое уравнение Максвелла (22.1). В правой части этого уравнения записаны две плотности тока — проводимости $\vec{\delta}$ и электрического смещения $\epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Но кроме токов проводимости и электрического смещения существует третий вид тока — ток переноса (это собирательное название).

Под *током переноса* понимают ток, природа которого отлична от природы тока проводимости и тока смещения, это, например, ток, возникающий в электронной лампе вследствие явления термоэлектронной эмиссии.

Плотность тока переноса равна объемной плотности переносимых зарядов ρ , умноженной на скорость их переноса $\vec{v}$.

Если ток переноса создается движением со скоростью $\vec{v}_+$ положительно заряженных частиц с объемной плотностью ρ_+ и движущихся со скоростью $\vec{v}_-$ отрицательно заряженных частиц с объемной плотностью ρ_- , то плотность тока переноса равна $\rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-$. Ток переноса, так же как и остальные виды токов, создает магнитное поле.

С учетом тока переноса первое уравнение Максвелла записывают следующим образом: $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \rho \vec{v}$.

Для тех задач, которые рассматриваются в ч. III учебника, ток переноса отсутствует, поэтому первое уравнение Максвелла и взято в форме (22.1).

Третье замечание. При чрезвычайно высоких частотах, когда длина электромагнитной волны становится соизмеримой с линейными размерами, характеризующими молекулярную структуру самого вещества, вещество уже нельзя рассматривать как континуум. В этом случае уравнения Максвелла должны быть заменены уравнениями квантовой теории поля.

Четвертое замечание. В курсе ТОЭ в основном рассматривают поля в изотропных линейных средах. В них вектор $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{H}$, вектор $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ совпадает по направлению с $\vec{E}$ и вектор $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$ с $\vec{E}$. В изотропных средах μ , ϵ и γ представляют собой некоторые постоянные числа, не зависящие от величины H или E (но зависящие от частоты). Если проекции вектора $\vec{B}$ на оси x, y, z обозначить B_x, B_y, B_z , а проекции $\vec{H}$ — через H_x, H_y, H_z , то для изотропных сред $B_x = \mu_a H_x, B_y = \mu_a H_y, B_z = \mu_a H_z$. Аналогично, $\vec{D}_x = \epsilon_a \vec{E}_x; D_y = \epsilon_a E_y; D_z = \epsilon_a E_z$ и $\vec{\delta}_x = \gamma \vec{E}_x$ и т. д. В анизотропных средах $\vec{B} = \vec{\mu}_a \vec{H}$ не совпадает по направлению с $\vec{H}$, $\vec{D}$ с $\vec{E}$, $\vec{\delta}$ с $\vec{E}$. Любая проекция $\vec{B}, \vec{D}$ и $\vec{\delta}$ зависит не только от одноименной проекции $\vec{H}$ или $\vec{E}$, но и от разноименных проекций. Так, B_x зависит не только от H_x , но и от H_y и H_z ; $B_x = \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z$; аналогично, $B_y = \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z$, где $\mu_{xx}, \mu_{xy}, \mu_{xz}$ — составляющие тензора магнитной проницаемости $\vec{\mu}_a$:

$$\vec{\mu}_a = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}.$$

Подобные выражения существуют и для тензоров $\vec{\epsilon}_a$ и $\vec{\gamma}$.

§ 22.9. Основные положения электродинамики движущихся сред (основы релятивистской электродинамики). Положим, что имеются две системы отсчета координат и времени. Одна система неподвижна, имеет начало в точке O , координаты произвольной точки в ней x, y, z и время t (система O). Другая система отсчета связана с движущейся по отношению к предыдущей системе отсчета средой, имеет начало в точке O_1 , а координаты той же точки в ней x_1, y_1, z_1 и время t_1 (система O_1). Допустим, что в момент времени $t = 0$ обе системы координат совпадают и что скорость движения среды $\vec{v}$ направлена по оси x . Тогда в соответствии с теорией относительности можно записать преобразования Лоренца, связывающие координаты и время в обеих системах отсчета:

$$x_1 = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y_1 = y; \quad z_1 = z; \quad t_1 = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (22.15)$$

где c — скорость света, $\beta = v/c$.

Обозначим напряженность электрического поля и магнитную индукцию в произвольной точке, которые бы измерил наблюдатель, неподвижный по отношению к системе O , соответственно как $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Физически $\vec{E}$ означает силу, действующую на единичный покоящийся заряд в системе O , а $\vec{B}$ — силу, действующую на единичный элемент тока, неподвижный в системе O : $\vec{E} = \vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z$; $\vec{B} = \vec{i} B_x + \vec{j} B_y + \vec{k} B_z$.

Напряженность электрического поля и магнитную индукцию, которые измерил бы наблюдатель, неподвижный по отношению к системе O_1 (т. е. движущийся со средой со скоростью $\vec{v}$), обозначим $\vec{E}_1$ и $\vec{B}_1$. Физически $\vec{E}_1$ означает силу, действующую на единичный покоящийся в системе O_1 заряд; $\vec{B}_1$ — силу, действующую на единичный элемент тока, покоящийся в движущейся среде:

$$\vec{E}_1 = \vec{i} E_{x1} + \vec{j} E_{y1} + \vec{k} E_{z1}; \quad \vec{B}_1 = \vec{i} B_{x1} + \vec{j} B_{y1} + \vec{k} B_{z1}.$$

Перейдем от уравнений Максвелла для неподвижных сред к уравнениям Максвелла для движущихся сред. С этой целью частные производные по x, y, z при взя-

тии ротора и дивергенции и частные производные по t заменим частными производными по x_1, y_1, z_1 и по времени t_1 , имея в виду, что в соответствии с (22.15):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t_1} \right); & \frac{\partial}{\partial t} &= \alpha \left(-v \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial t_1} \right); \\ \frac{\partial}{\partial x_1} &= \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right); & \frac{\partial}{\partial t_1} &= \alpha \left(v \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right); \\ \frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial}{\partial y}; & \frac{\partial}{\partial z_1} &= \frac{\partial}{\partial z}; & \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.\end{aligned}$$

После раскрытия ротора и объединения членов с одинаковыми ортами в первом уравнении Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ получим

$$\text{rot } \vec{H}_1 = \vec{\delta}_1 + \frac{\partial \vec{D}_1}{\partial t_1}. \quad (22.16)$$

Проекции векторов на координатные оси в обеих системах отсчета связаны соотношениями:

$$H_{x1} = H_x; \quad H_{y1} = \alpha (H_y + v D_z); \quad H_{z1} = \alpha (H_z - v D_y). \quad (22.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\delta}_1 &= \vec{i} \delta_{x1} + \vec{j} \delta_{y1} + \vec{k} \delta_{z1}; \\ \delta_{x1} &= \alpha (\delta_x - v \rho) \quad \delta_{y1} = \delta_y; \quad \delta_{z1} = \delta_z. \end{aligned} \right\} \quad (22.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{D}_1 &= \vec{i} D_{x1} + \vec{j} D_{y1} + \vec{k} D_{z1}; \\ D_{x1} &= D_x; \quad D_{y1} = \alpha \left(D_y - \frac{v}{c^2} H_z \right); \quad D_{z1} = \alpha \left(D_z + \frac{v}{c^2} H_y \right). \end{aligned} \right\} \quad (22.19)$$

Аналогичные преобразования второго уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{E}_1 = - \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t_1} \quad (22.20)$$

дают связь между проекциями векторов:

$$E_{x1} = E_x; \quad E_{y1} = \alpha (E_y - v B_z); \quad E_{z1} = \alpha (E_z + v B_y). \quad (22.21)$$

$$B_{x1} = B_x; \quad B_{y1} = \alpha \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right); \quad B_{z1} = \alpha \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right). \quad (22.22)$$

Третье и четвертое уравнения Максвелла в системе O_1 имеют вид:

$$\text{div } \vec{D}_1 = \rho_1, \quad (22.23)$$

$$\text{div } \vec{B}_1 = 0. \quad (22.24)$$

Здесь

$$\rho_1 = \alpha \left(\rho - \frac{v}{c^2} \delta_x \right). \quad (22.25)$$

Обратим внимание еще раз на то, что в системе O_1 операции дифференцирования при взятии ротора и дивергенции производятся по координатам x_1, y_1, z_1 .

В системе O_1 , для которой среда неподвижна, выполняется условие непрерывности тангенциальной составляющей напряженности E_{t1} , тангенциальной составляющей H_{t1} и непрерывность нормальных составляющих D_{n1} и B_{n1} .

В системе O_1

$$\vec{J}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} - \vec{H}_1; \quad \vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \epsilon_0 \vec{E}_1. \quad (22.26)$$

В системе O

$$\vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}; \quad \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}; \quad (22.27)$$

$\vec{J}$ и $\vec{J}_1$ — намагниченность и $\vec{P}$ и $\vec{P}_1$ — поляризация в системах O и O_1 :

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \vec{i} J_x + \vec{j} J_y + \vec{k} J_z; & \vec{J}_1 &= \vec{i} J_{x1} + \vec{j} J_{y1} + \vec{k} J_{z1}; \\ \vec{P} &= \vec{i} P_x + \vec{j} P_y + \vec{k} P_z; & \vec{P}_1 &= \vec{i} P_{x1} + \vec{j} P_{y1} + \vec{k} P_{z1}. \end{aligned}$$

Используя уравнения (22.17), (22.19), (22.21), получим связи между проекциями векторов намагниченности и поляризации в системах O и O_1 :

$$\left. \begin{aligned} J_{x1} &= J_x; & J_{y1} &= \alpha (J_y + v P_y); & J_{z1} &= \alpha (J_z - v P_y); \\ P_{x1} &= P_x; & P_{y1} &= \alpha \left(P_y - \frac{v P_z}{c^2} \right); & P_{z1} &= \alpha \left(P_z + \frac{v P_y}{c^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (22.28)$$

Из уравнений (22.17) и (22.22) следует, что если в системе O магнитное поле отсутствует ($\vec{B} = 0$), но имеется электрическое ($\vec{E} \neq 0$), то в системе O_1 имеется не только электрическое, но и магнитное поле. Из уравнений (22.19) и (22.21) заключаем, что если в системе O отсутствует электрическое поле ($\vec{E} = 0$), но есть магнитное ($\vec{B} \neq 0$), то в системе O_1 наблюдается не только магнитное, но и электрическое поле. Плотность тока $\vec{J}_1$ в системе O_1 создается не только током проводимости $\vec{J}_1$, но и током переноса $\alpha \vec{v} \rho$ [см. уравнение (22.18)].

В соответствии с уравнением (22.25) перемещение тока с плотностью δ_x параллельно самому себе с системой O_1 наблюдатель в системе O воспринимает как возникновение объемного заряда $\frac{v}{c^2} \delta_x$, дополнительного к объемной плотности заряда

ρ_1 . В соответствии с уравнением (22.28) движение поляризованной среды со скоростью v воспринимается в системе O как появление *дополнительной намагниченности*, а движение намагниченной среды со скоростью v воспринимается в системе O как возникновение *дополнительной поляризации*.

Для поля, связанного с системами O и O_1 , имеют место следующие инварианты:

$$\begin{aligned} \frac{E_1^2}{c} - B_1^2 c &= \frac{E^2}{c} - B^2 c; & \vec{E}_1 \vec{B}_1 &= \vec{E} \vec{B}; \\ D_1^2 c - \frac{H_1^2}{c} &= D^2 c - \frac{H^2}{c}; & \vec{D}_1 \vec{H}_1 &= \vec{D} \vec{H}. \end{aligned}$$

Если скорость движения среды мала по сравнению со скоростью света, то $(v^2/c^2) \ll 1$ и $\alpha \approx 1$, при этом преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея $x_1 = x - vt$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, $t_1 = t$, а связи между величинами в системах O и O_1 становятся такими:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]; & \vec{B}_1 &= \vec{B} - \frac{[\vec{v} \vec{E}]}{c^2}; & \vec{H}_1 &= \vec{H} - \vec{v} \vec{D}; & \vec{D}_1 &= \vec{D} + \frac{[\vec{v} \vec{H}]}{c^2}; \\ \vec{\delta}_1 &= \vec{\delta} - \vec{v} \rho; & \rho_1 &= \rho - \frac{\vec{v} \vec{\delta}}{c^2}; & \vec{J}_1 &= \vec{J} + [\vec{v} \vec{P}]; & \vec{P}_1 &= \vec{P} - \frac{[\vec{v} \vec{J}]}{c^2}. \end{aligned}$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение переменного электромагнитного поля и запишите совокупность уравнений Максвелла.
2. Покажите, что из первого уравнения Максвелла следует принцип непрерывности полного тока (или закон сохранения заряда), а из второго — принцип непрерывности магнитной индукции.
3. Чем объяснить, что во втором уравнении Максвелла, в отличие от первого, поставлен знак минус?
4. Какие уравнения в интегральной форме соответствуют 1-му и 2-му уравнениям Максвелла?
5. Прокомментируйте теорему Умова—Пойнтинга для мгновенных значе-

ний величин и для величин в комплексной форме записи. 6. Можно ли утверждать, что при постоянном токе электромагнитная энергия передается по проводам? 7. Поясните смысл преобразования, осуществляемого с помощью теоремы Остроградского—Гаусса. 8. Чем объяснить, что показание вольтметра в переменном электромагнитном поле зависит от того, как расположены провода от вольтметра до объекта измерения? 9. Поясните, в силу каких причин ϵ , γ и μ могут оказаться комплексными числами. 10. Какие среды называют анизотропными? 11. Решите задачи 22.2; 22.9; 22.11.

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЯ

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

§ 23.1. Уравнения Максвелла для проводящей среды. Рассмотрим особенности распространения электромагнитной волны в проводящей среде с проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ .

Обратимся к первому и второму уравнениям Максвелла, записанным в комплексной форме для синусоидально изменяющихся во времени E и H :

$$\operatorname{rot} \dot{H} = \gamma \dot{E} + j\omega\epsilon_a \dot{E}$$

и

$$\operatorname{rot} \dot{E} = -j\omega\mu_a \dot{H}.$$

В проводящей среде даже при очень высоких частотах произведение $\omega\epsilon_a$ много меньше проводимости γ . Поэтому с большой степенью точности слагаемым $j\omega\epsilon_a \dot{E}$ в первом уравнении Максвелла для проводящих сред можно пренебречь.

В настоящее время наука не располагает точными данными о числовом значении электрической проницаемости ϵ для металлов. Имеются лишь сведения, что порядок ϵ для металлов такой же, как и для большинства диэлектриков (т. е. от нескольких единиц до нескольких десятков). В качестве примера возьмем ϵ для меди, равное 10, и найдем, во сколько раз ток проводимости в ней будет больше тока смещения при $\omega = 10^3$ и при $\omega = 10^8$ рад/с. При $\omega = 10^3$

$$\frac{\gamma}{\omega\epsilon_a} = \frac{5,6 \cdot 10^7}{10^3 \cdot 10 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}} = 6,33 \cdot 10^{14};$$

при $\omega = 10^8$

$$\frac{\gamma}{\omega\epsilon_a} = 6,33 \cdot 10^9.$$

т. е. в рассмотренном числовом примере даже при $\omega = 10^8$ ток проводимости больше тока смещения в $6,33 \cdot 10^9$ раз.

Таким образом, первое и второе уравнения Максвелла для проводящей среды приобретают вид:

$$\operatorname{rot} \dot{H} = \gamma \dot{E} \quad (23.1)$$

и

$$\operatorname{rot} \dot{E} = -j\omega\mu_a \dot{H}. \quad (23.2)$$

Эти два уравнения представляют собой уравнения с двумя неизвестными $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Решим их совместно. С этой целью возьмем ротор от уравнения (23.1): $\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = \gamma \text{ rot } \vec{E}$.

Учтем, что $\text{div } \vec{H} = 0$, и поэтому $\text{grad div } \vec{H} = 0$. Вместо $\text{rot } \vec{E}$ в соответствии с (21.2) подставим $-j\omega\mu_a \vec{H}$. Получим

$$\nabla^2 \vec{H} = j\omega\gamma\mu_a \vec{H}. \quad (23.3)$$

Уравнение (23.3) является дифференциальным относительно $\vec{H}$. В общем случае, когда $\vec{H}$ зависит от всех трех или даже только от двух координат, решение (23.3) довольно сложно. Поэтому ограничимся рассмотрением решения этого уравнения для частных случаев — для плоской и цилиндрической электромагнитных волн.

§ 23.2. Плоская электромагнитная волна. В общем случае под *плоской электромагнитной волной* понимают волну, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ которой расположены в плоскости xoy , перпендикулярной направлению

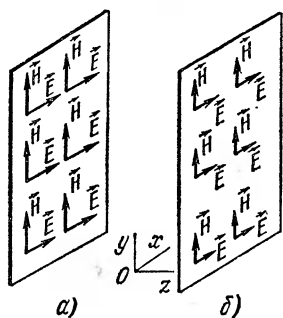


Рис. 23.1

распространения волны (ось z) и изменяющиеся только в функции координаты z и времени t . В дальнейшем (за исключением § 24.8) под плоской волной будем понимать *плоскую линейно поляризованную* волну, в которой вектор $\vec{E}$ направлен вдоль одной, а вектор $\vec{H}$ вдоль другой координатной оси плоскости xoy . Плоская линейно поляризованная волна показана на рис. 23.1. На рисунке изображены для одного и того же момента времени векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в двух параллельных плоскостях, перпендикулярных оси z декартовой системы координат. Во всех точках первой плоскости (рис. 23.1, а) напряженность электрического (магнитного) поля одинакова по величине и направлению. Во всех точках второй плоскости (рис. 23.1, б) напряженность электрического (магнитного) поля также одинакова по величине и направлению, но не равна напряженности поля в первой плоскости.

В силу самого определения плоской волны:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0.$$

В плоской волне $\vec{E}$ и $\vec{H}$ являются функциями только одной координаты, в рассматриваемом случае функцией только z .

Повернем координатные оси таким образом, чтобы ось y совпала с напряженностью магнитного поля $\vec{H}$. При этом $\vec{H} = \vec{j}H$, где $\vec{j}$ —

единичный орт оси y декартовой системы координат. Подставим $\vec{H} = \vec{j}\dot{H}$ в уравнение (23.3) и раскроем ∇^2 :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \vec{j}\dot{H} = j\omega\gamma\mu_a \vec{j}\dot{H}. \quad (23.4)$$

Учтем, что

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial y^2} = 0.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = j\omega\gamma\mu_a \dot{H}. \quad (23.5)$$

В этом уравнении (23.5) вместо частной написана обыкновенная производная. Переход от частной производной к обыкновенной для плоской волны является естественным, так как $\dot{H}$ — это функция только одной переменной z .

Уравнение (23.5) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение записывают следующим образом:

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}, \quad (23.6)$$

где $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ — постоянные интегрирования; это комплексы, которые определяют из граничных условий; для каждой конкретной задачи это свои постоянные.

Из характеристического уравнения $p^2 = j\omega\gamma\mu_a$ найдем коэффициент

$$p = \sqrt{j\omega\gamma\mu_a}. \quad (23.7)$$

Если γ берется в единицах $(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$, μ_a в Г/м , постоянная распространения p измеряется в м^{-1} . Так как $\sqrt{j} = \sqrt{e^{j90^\circ}} = e^{j45^\circ} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$, то p можно представить и так:

$$p = k(1+j), \quad (23.8)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}. \quad (23.9)$$

Найдем напряженность электрического поля с помощью уравнений (23.1) и (23.6). Из (23.1) следует, что $\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \text{rot } \vec{H}$.

Найдем $\text{rot } \vec{H}$. В соответствии с уравнением (21.6) (учитывая, что $\frac{\partial \dot{H}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{H}}{\partial y} = 0$) имеем

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dot{H} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(-\frac{\partial \dot{H}}{\partial z} \right). \quad (23.10)$$

Следовательно,

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{dH}{dz} \right). \quad (23.10')$$

Производная

$$\frac{dH}{dz} = p [\dot{C}_1 e^{pz} - \dot{C}_2 e^{-pz}]. \quad (23.11)$$

Выражение (23.10') показывает, что напряженность электрического поля в плоской волне при выбранном расположении осей координат направлена вдоль оси x , об этом свидетельствует присутствие единичного орта оси x (орта $\vec{i}$). Таким образом, в плоской электромагнитной волне между $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ есть пространственный сдвиг в 90° ($\dot{\vec{E}}$ направлено по оси x , а $\dot{\vec{H}}$ — по оси y).

Частное от деления p на γ принято называть *волновым сопротивлением*:

$$Z_{\text{в}} = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\gamma}} e^{i45^\circ}. \quad (23.12)$$

Волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$, измеряемое в омах, зависит от свойств среды (от γ и μ_0) и угловой частоты ω . В соответствии с (23.10') и (23.11) проекция $\dot{\vec{E}}$ на ось x равна:

$$\dot{E} = \dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}},$$

где

$$\dot{E}_{\text{пад}} = Z_{\text{в}} \dot{C}_2 e^{pz} \quad \text{и} \quad \dot{E}_{\text{отр}} = -Z_{\text{в}} \dot{C}_1 e^{pz}.$$

Проекция $\dot{\vec{H}}$ на ось y в соответствии с (21.6): $\dot{H} = \dot{H}_{\text{пад}} + \dot{H}_{\text{отр}}$, где $\dot{H}_{\text{пад}} = \dot{C}_2 e^{-pz}$ и $\dot{H}_{\text{отр}} = \dot{C}_1 e^{pz}$.

Компоненты падающей волны $\vec{E}_{\text{пад}}$ и $\vec{H}_{\text{пад}}$ дают вектор Пойнтинга $\vec{P}_{\text{пад}}$ (рис. 23.2, а), направленный вдоль положительного направления оси z . Следовательно, движение энергии падающей волны происходит вдоль положительного направления оси z .

Компоненты отраженной волны $\vec{E}_{\text{отр}}$ и $\vec{H}_{\text{отр}}$ дают вектор Пойнтинга $\vec{P}_{\text{отр}}$ (рис. 23.2, б), направленный вдоль отрицательного направления оси z . Это означает, что отра-

женная волна несет с собой энергию вдоль отрицательного направления оси z .

Волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$ можно трактовать как отношение $\dot{E}_{\text{пад}}/\dot{H}_{\text{пад}}$ *. Так как волновое сопротивление является числом комплексным [см. формулу (23.12)] и имеет аргумент 45° , то сдвиг во времени между $\dot{E}_{\text{пад}}$ и $\dot{H}_{\text{пад}}$ для одной и той же точки поля тоже равен 45° .

* Отношение $\dot{E}_{\text{отр}}$ к $-\dot{H}_{\text{отр}}$ также равно $Z_{\text{в}}$.

§ 23.3. Распространение плоской электромагнитной волны в однородном проводящем полупространстве. Рассмотрим вопрос о распространении плоской электромагнитной волны в однородной проводящей среде, простирающейся теоретически в бесконечность (рис. 23.3).

Электромагнитная волна проникает из диэлектрика в проводящую среду и распространяется в ней. Так как среда простирается теоретически в бесконечность и падающая волна в толще проводящей среды не встречает границы, которая «возмутила» бы ее распространение, то отраженной волны в данном случае не возникает.

При наличии только одной падающей волны $\dot{H} = \dot{C}_2 e^{-\rho z}$ и $\dot{E} = Z_n \dot{C}_2 e^{-\rho z}$.

Постоянную интегрирования $\dot{C}_2$ найдем из граничных условий. Если обозначить напряженность магнитного поля на поверхности проводящей среды через $\dot{H}_a = H_a e^{i\psi_a}$, то при $z = 0$ $\dot{C}_2 = \dot{H}_a$. Поэтому с учетом (23.8)

$$\dot{H} = H_a e^{-kz} e^{-jkz} e^{i\psi_a}. \quad (23.13)$$

В свою очередь

$$\dot{E} = H_a e^{-kz} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{-jkz} e^{i\psi_a} e^{i45^\circ}. \quad (23.14)$$

Чтобы записать выражения для мгновенных значений H и E , необходимо правые части (23.13) и (23.14) умножить на $e^{i\omega t}$ и взять мнимые части от получившихся произведений.

Тогда получим:

$$H = H_a e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a) \quad (23.15)$$

и

$$E = H_a \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a + 45^\circ). \quad (23.16)$$

Рис. 23.4

Проанализируем полученные выражения. Амплитуда $H = H_a e^{-kz}$; ампли-

туда $E = H_a \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{-kz}$. С увеличением z множитель e^{-kz} уменьшается по показательному закону. Следовательно, по мере проникновения электромагнитной волны в проводящую среду амплитуды E и H уменьшаются по показательному закону. На рис. 23.4 изображены огибающие амплитуд H , построенные на основе $H_a e^{-kz}$. Мгновенные значения H и E определяется аргументом синуса, который в выражении (23.15), например, зависит от z и от ωt . Если принять $\omega t = \text{const}$, то на графике мгновенных значений H в функции от z будет получена

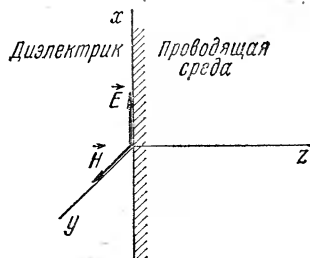
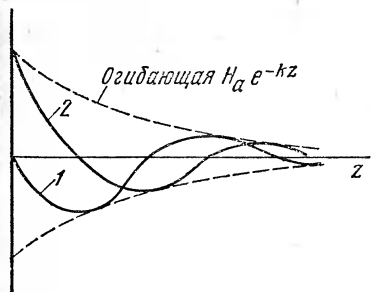


Рис. 23.3



кривая 1 (см. рис. 23.4) при $\omega t + \psi_a = 0$ и кривая 2 при $\omega t + \psi_a = 90^\circ$.

Для того чтобы охарактеризовать, насколько быстро уменьшается амплитуда падающей волны по мере проникновения волны в проводящую среду, вводят понятие «глубина проникновения».

§ 23.4. Глубина проникновения и длина волны. Под *глубиной проникновения* Δ понимают расстояние вдоль направления распространения волны (вдоль оси z), на котором амплитуда падающей волны E (или H) уменьшается в $e = 2,71$ раз. Глубину проникновения определяют с помощью выражения: $e^{-k\Delta} = e^{-1}$. Отсюда следует, что $k\Delta = 1$ или

$$\Delta = 1/k. \quad (23.17)$$

Глубина проникновения зависит от свойств проводящей среды (γ и μ) и частоты ω . Так, если электромагнитная волна имеет частоту $f = 5000$ Гц и проникает в проводящую среду, у которой $\gamma = 10^7$ (Ом·м) $^{-1}$ и $\mu = 10^3$, то*

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 5000 \cdot 10^3 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^7}{2}} = 14\,100 \text{ м}^{-1}.$$

Глубина проникновения $\Delta = 1/k \approx 7 \cdot 10^{-5}$ м, т. е. на расстоянии в 0,007 см амплитуды H и E снизились в 2,71 раза.

Под *длиной волны* λ в проводящей среде понимают расстояние вдоль направления распространения волны (вдоль оси z), на котором фаза колебания изменяется на 2π . Длину волны определяют из уравнения $\lambda k = 2\pi$, отсюда:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (23.18)$$

Для рассмотренного числового примера

$$\lambda = \frac{2\pi}{14\,100} \approx 0,000445 \text{ м}.$$

Иногда пользуются понятием фазовой скорости распространения электромагнитной волны в проводящей среде.

Под *фазовой скоростью* понимают скорость, с которой надо было бы перемещаться вдоль оси z , чтобы колебание имело одну и ту же фазу. Фаза колебания определяется выражением $\omega t - kz + \psi_a$.

Производная от постоянной есть нуль, поэтому $\frac{d}{dt}(\omega t - kz + \psi_a) = 0$, или

$$\omega - k \frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = v_{\text{фаз}}; \quad v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}. \quad (23.19)$$

Для рассмотренного числового примера $v_{\text{фаз}} = \frac{2\pi \cdot 5000}{14\,100} \approx 2,25$ м/с.

* Полагаем, что μ не зависит от величины H . Решение, в котором учтено, что μ является функцией величины H , дано в [10].

§ 23.5. **Магнитный поверхностный эффект.** В качестве примера распространения плоских электромагнитных волн в проводящей среде рассмотрим поле в стальном листе при прохождении вдоль листа переменного магнитного потока $\dot{\Phi}_m$. Лист (рис. 23.5) имеет толщину $2a$, высоту h ($h \gg 2a$) и большую протяженность в направлении, перпендикулярном рисунку. Средняя плотность магнитного потока по сечению листа $\dot{B}_{cp} = \frac{\dot{\Phi}_m}{2ah}$.

Задача состоит в определении законов изменения $\dot{H}$ и $\dot{E}$ по сечению листа. В силу симметрии напряженность магнитного поля на левой поверхности листа та же, что и на правой поверхности листа. Обозначим ее через $\dot{H}_a$ и будем полагать известной (в дальнейшем выразим ее через $\dot{B}_{cp}$).

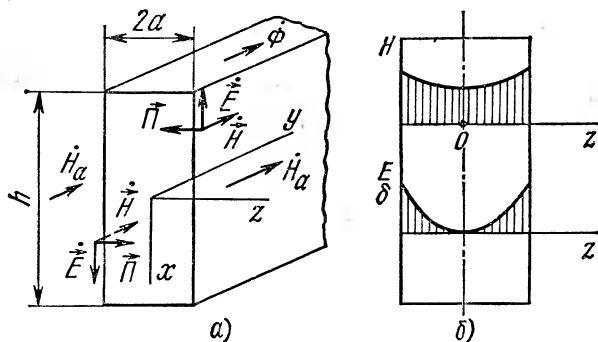


Рис. 23.5

Так как толщина листа $2a$ много меньше высоты листа h , то искажающим влиянием краев листа на поле можно в первом приближении пренебречь и считать, что в лист с двух сторон проникает плоская электромагнитная волна.

Расположим оси координат декартовой системы в соответствии с рис. 23.5. Примем, как и прежде, $\dot{\vec{H}} = \vec{j}\dot{H}$. Общее решение для $\dot{H}$ таково: $\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz}$.

Из граничных условий найдем постоянные интегрирования. При $z = -a$, т. е. для точек, находящихся на левой стороне листа,

$$\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{-pa} + \dot{C}_2 e^{pa}; \quad (23.20)$$

при $z = +a$

$$\dot{H}_a = \dot{C}_1 e^{pa} + \dot{C}_2 e^{-pa}. \quad (23.21)$$

Совместное решение (23.20) и (23.21) относительно $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ дает

$$\dot{C}_1 = \dot{C}_2 = \frac{\dot{H}_a}{e^{pa} + e^{-pa}} = \frac{\dot{H}_a}{2 \operatorname{ch} pa}.$$

Следовательно, в произвольной точке

$$\dot{H} = \frac{\dot{H}_a}{2 \operatorname{ch} pa} (e^{pz} + e^{-pz}) = \dot{H}_a \frac{\operatorname{ch} pz}{\operatorname{ch} pa}. \quad (23.22)$$

Напряженность электрического поля

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} \right) = -\vec{i} \left(\frac{p}{\gamma} \dot{H}_a \frac{\text{sh } pz}{\text{ch } pa} \right) = -\vec{i} \dot{E},$$

где

$$\dot{E} = \frac{p}{\gamma} \dot{H}_a \frac{\text{sh } pz}{\text{ch } pa}. \quad (23.23)$$

При $z = +a$ напряженность $\dot{\vec{E}}$ направлена вверх (вдоль оси $-x$); при $z = -a$ — вниз (вдоль оси $+x$, см. рис. 23.5, а). Вектор Пойнтинга направлен к средней плоскости листа (внутри листа).

Как известно из ч. II учебника, ток, возникающий при прохождении по листу переменного магнитного потока, принято называть *вихревым*. Вектор плотности вихревого тока $\dot{\vec{\delta}} = \gamma \dot{\vec{E}}$ в любой точке листа коллинеарен с вектором $\dot{\vec{E}}$ в этой же точке. Магнитная индукция в произвольной точке

$$\dot{B} = \mu_a \dot{H} = \frac{\mu_a \dot{H}_a \text{ch } pz}{\text{ch } pa}. \quad (23.24)$$

Среднее значение магнитной индукции в листе

$$\dot{B}_{\text{cp}} = \frac{1}{a} \int_0^a \dot{B} dz = \frac{\mu_a \dot{H}_a \text{sh } pa}{ap \text{ch } pa} = \frac{\mu_a \dot{H}_a \text{th } pa}{ap}. \quad (23.25)$$

Если считать $\dot{B}_{\text{cp}}$ известной и равной $\frac{\dot{\Phi}_m}{2ah}$, то из (23.25) можно найти напряженность поля на поверхности листа:

$$\dot{H}_a = \frac{ap \dot{B}_{\text{cp}}}{\mu_a \text{th } pa}. \quad (23.26)$$

Заметим, что аргумент $pa = ka + jka$ является комплексом и $\text{th } pa$ есть гиперболический тангенс от комплексного аргумента; он также является комплексом:

$$\text{th } pa = \text{th}(ka + jka) = \frac{\text{sh } 2ka + j \sin 2ka}{\text{ch } 2ka + \cos 2ka}. \quad (23.27)$$

Отношение среднего значения магнитной индукции по сечению листа $\dot{B}_{\text{cp}}$ к напряженности поля на поверхности листа $\dot{H}_a$ называют *комплексной магнитной проницаемостью*:

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a \text{th } pa}{ap} (\tilde{\mu}_a = \mu_0 \tilde{\mu}).$$

Она зависит от величины μ , частоты ω и толщины листа. При больших значениях аргумента $2ka \text{ sh } 2ka \approx \text{ch } 2ka$, значения этих функций намного больше 1. Поэтому при больших значениях $2ka$

$$\text{th } pa \approx \frac{\text{sh } 2ka}{\text{ch } 2ka} \approx 1$$

и комплексная магнитная проницаемость $\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a}{pa}$.

Так, например, при толщине листа $2a = 0,015$ см, $\mu = 20\,000$, $\gamma = 1,8 \cdot 10^6$ (Ом·м)⁻¹ и $f = 50\,000$ Гц; $k = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu a}{2}} = 84\,200$; $p = 84\,200 \sqrt{2} e^{i45^\circ}$; $ka = 6,31$; $2ka = 12,62$; $\text{th } pa = \frac{\text{sh } 12,62}{\text{ch } 12,62} \approx 1$.

Следовательно,

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a}{pa} = \frac{20\,000\mu_0}{84\,200 \sqrt{2} e^{i45^\circ} \cdot 0,000015} = 2250 e^{-i45^\circ} \mu_c.$$

Напряженность поля в средней плоскости листа (при $z = 0$) $\dot{H}_{z=0} = \frac{H_a}{\text{ch } pa}$. Отношение напряженности поля на краю листа (при $z = a$) к напряженности поля в средней плоскости листа:

$$\frac{H_a}{H_{z=0}} = \text{ch } pa. \quad (23.28)$$

Левая и правая части формулы (23.28) являются комплексами. Модуль $\text{ch } pa$ показывает, во сколько раз модуль $\dot{H}_a$ больше модуля $\dot{H}_{z=0}$. Найдем модуль $\text{ch } pa$. С этой целью запишем два сопряженных комплекса: $\text{ch}(ka + jka) = \text{ch } ka \cos ka + j \sin ka \sin ka$ и $\text{ch}(ka - jka) = \text{ch } ka \cos ka - j \sin ka \sin ka$.

Произведение сопряженных комплексов дает квадрат модуля. Следовательно,

$$|\text{ch } pa|^2 = \text{ch}(ka + jka) \text{ch}(ka - jka) = \frac{1}{2} [\text{ch } 2ka + \cos 2ka]^*.$$

Таким образом,

$$|\text{ch } pa| = \sqrt{\frac{\text{ch } 2ka + \cos 2ka}{2}}. \quad (23.29)$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть $\mu = 100$; $f = 500$ Гц; $\gamma = 10^7$ (Ом·м)⁻¹. При этом $k = 1410$ м⁻¹.

Найдем отношение напряженности поля в средней плоскости к напряженности поля на поверхности листа при толщине листа:

$$2a = 1 \text{ мм}; 2 \text{ мм}; 4 \text{ мм};$$

$$2ka = 1,41; 2,82; 5,64;$$

$$\frac{1}{|\text{ch } pa|} = 0,91; 0,52; 0,1.$$

Таким образом, напряженность поля в средней плоскости листа может быть много меньше напряженности поля на краю листа.

Явление неравномерного распределения поля по сечению проводящего тела, вызванное затуханием электромагнитной волны при ее распространении в проводящую среду, называют *поверхностным эф-*

* В силу того, что $\text{ch } x + \text{ch } y = 2 \text{ch } \frac{x+y}{2} \text{ch } \frac{x-y}{2}$.

фектом. Если вдоль листа направлен магнитный поток, то поверхностный эффект часто называют *магнитным*, если вдоль плоской шины направлен переменный ток, то поверхностный эффект часто называют *электрическим* поверхностным эффектом. Природа их одна и та же, а слова «магнитный» или «электрический» свидетельствуют лишь о том, что направлено вдоль листа (шины): поток или ток.

На рис. 23.5, б построены две кривые. Кривая $H(z)$ характеризует изменение модуля напряженности магнитного поля в функции от z . В средней плоскости листа H до нуля не снижается, так как $\text{ch } 0 \neq 0$. Кривая H строится по уравнению (23.22). Кривая $E(z)$ характеризует изменение модуля напряженности электрического поля в функции от z . Эта кривая строится по (23.23); $\text{sh } pz_{z=0} = 0$ и потому кривая проходит через нуль при $z = 0$. Кривая плотности вихревых токов $\delta = \gamma E$ качественно повторяет кривую E от z (разница только в масштабе).

§ 23.6. Электрический поверхностный эффект в плоской шине. Эффект близости. При электрическом поверхностном эффекте — рис. 23.6, а — вдоль пластины (шины) направлен синусоидальный ток

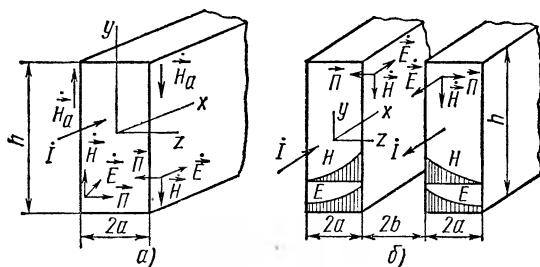


Рис. 23.6

$\dot{I}$ частоты ω . В этом случае поле внутри пластины определяется по формулам:

$$\dot{H} = -\frac{\dot{I}}{2h} \frac{\text{sh } pz}{\text{sh } pa}, \quad \dot{E} = \frac{p}{\gamma} \frac{\dot{I}}{2h} \frac{\text{ch } pz}{\text{sh } pa}; \quad \delta = \gamma \dot{E}.$$

Соппротивление единицы длины шины (пластины) $Z = R + jX = \frac{p}{\gamma 2h \text{th } pa}$.

Зависимость модуля $H(z)$ в этом случае такая же, как и зависимость $E(z)$ на рис. 23.5, б, а зависимость $E(z)$ такая же, как и зависимость $H(z)$ на этом же рисунке.

Если по двум параллельным близко расположенным плоским шинам (см. рис. 23.6, б) будет протекать в противоположных направлениях синусоидально изменяющийся во времени ток $\dot{I}$ частоты ω , а размеры $2a \ll h$ и $2b \ll h$, то, поместив начало декартовой системы координат в средней плоскости левой шины и учтя, что слева от левой шины напряженность поля $H = 0$, а в пространстве между шинами

$\dot{H} = -\dot{I}/h$ (в этом можно убедиться на основании закона полного тока), получим формулы для $\dot{H}$ и $\dot{E}$ в левой шине:

$$\dot{H} = -\frac{\dot{I}}{h} \frac{\operatorname{sh} p(a+z)}{\operatorname{sh} 2pa}, \quad \dot{E} = \frac{p}{\gamma} \frac{\dot{I}}{h} \frac{\operatorname{ch} p(a+z)}{\operatorname{sh} 2pa}.$$

Эпюра модулей H и E в функции от координаты z показана на рис. 23.6, б. Поле одной шины влияет на распределение поля в другой шине. Это явление называют *эффектом близости*. Комплексное сопротивление единицы длины двух плоских шин, расположенных в воздухе, равно двум комплексным сопротивлениям самих шин плюс индуктивное сопротивление, обусловленное магнитным потоком, проходящим в пространстве между шинами,

$$Z = R + jX = \frac{2p}{\gamma h \operatorname{th} 2pa} + j \frac{\mu_0 \omega 2b}{h}.$$

§ 23.7. Неравномерное распределение тока в прямоугольной шине, находящейся в пазу электрической машины. Расположим оси декартовой системы в соответствии с рис. 23.7, а. Обозначим: I — ток по шине; b — ширина, h — высота паза. Магнитная проницаемость шины μ_a . Магнитную проницаемость ферромагнитного материала, в котором сделан паз, полагаем очень большой, теоретически стремящейся к бесконечности. При этом допущении индукция в ферромагнитном материале будет конечна, а напряженность поля в нем будет стремиться к нулю. В шине $\dot{H}$ направлена по оси y , $\dot{E}$ — по оси x . Вектор Пойнтинга направлен по оси z . Электромагнитная волна проникает из диэлектрика в шину через наружную поверхность $tnsq$ и по мере проникновения в шину затухает по амплитуде.

По закону полного тока при $z = 0$ $H = I/b$, при $z = h$ $H = 0$. Для определения постоянных интегрирований $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ в выражении

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{pz} + \dot{C}_2 e^{-pz} \quad (a)$$

составим два уравнения $\dot{C}_1 + \dot{C}_2 = I/b$ и $\dot{C}_1 e^{ph} + \dot{C}_2 e^{-ph} = 0$. После определения $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ и подстановки их в (а) получим:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{\dot{I}}{b} \frac{\operatorname{sh} p(h-z)}{\operatorname{sh} ph}; \quad \dot{E} = \dot{I} \dot{E}_x = \dot{I} \dot{E}; \\ \dot{E} &= -\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}}{dz} = \frac{p}{\gamma} \frac{\dot{I}}{b} \frac{\operatorname{ch} p(h-z)}{\operatorname{sh} ph}; \quad \dot{\delta} = \gamma \dot{E}. \end{aligned}$$

Графики модулей H и E по высоте шины изображены на рис. 23.7, б и в.

§ 23.8. Поверхностный эффект в цилиндрическом проводе. По цилиндрическому проводу радиусом a протекает синусоидальный ток $\dot{I}$ частотой ω . Требуется вывести формулы для определения плотности тока $\dot{\delta}$ и напряженности $\dot{H}$ в любой точке сечения провода. Полагаем обратный провод настолько далеко удаленным от прямого, что влияние обратного провода на поле в прямом проводе можно не учитывать.

Решение проведем в цилиндрической системе координат (рис. 23.8). Плотность тока $\dot{\delta}$ направлена по оси z , поэтому $\dot{\delta} = \dot{z}_0 \dot{\delta}$. Воспользуемся

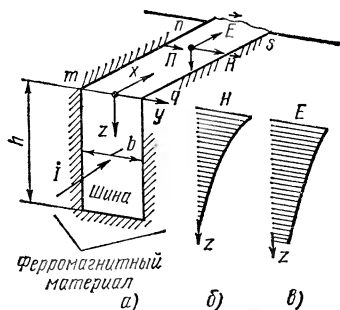


Рис. 23.7

уравнениями (23.1) и (23.2), предварительно умножив последнее на r .
Получим

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{\delta}}; \quad (23.30)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{\delta}} = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}, \quad (23.31)$$

или

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{\delta}} = -j\omega\mu_a \dot{\vec{\delta}}, \text{ т. е. } (\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{\delta}} - \nabla^2 \dot{\vec{\delta}}) \vec{z}^0 = (-j\omega\mu_a) \dot{\vec{\delta}} \vec{z}^0.$$

В установившемся режиме $\operatorname{div} \dot{\vec{\delta}} = 0$. Поэтому $\nabla^2 \dot{\vec{\delta}} = j\omega\mu_a \dot{\vec{\delta}}$.
Раскроем $\nabla^2 \dot{\vec{\delta}}$ в цилиндрической системе координат [см. формулу (19.30)] и учтем, что $\dot{\vec{\delta}}$ от α и от z не зависит. Получим

$$\frac{1}{r} \left(\frac{d\dot{\delta}}{dr} + r \frac{d^2 \dot{\delta}}{dr^2} \right) = j\omega\mu_a \dot{\delta}, \quad \text{или}$$

$$\frac{d^2 \dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\delta}}{dr} = j\omega\mu_a \dot{\delta}.$$

Обозначим

$$q^2 = -j\omega\mu_a. \quad (23.32)$$

Тогда

$$\frac{d^2 \dot{\delta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\delta}}{dr} + q^2 \dot{\delta} = 0,$$

или

$$\frac{d^2 \dot{\delta}}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \frac{d\dot{\delta}}{d(qr)} + \dot{\delta} = 0. \quad (23.33)$$

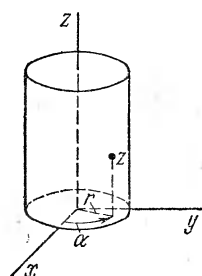


Рис. 23.8

Уравнение (23.33) является частным случаем уравнения Бесселя (15.4) при $p = 0$. Роль x играет qr , а роль y — $\dot{\delta}$.

Как известно из курса математики, решение уравнения (23.33) можно записать следующим образом:

$$\dot{\delta} = \dot{A} J_0(qr) + \dot{B} N_0(qr), \quad (23.34)$$

где $\dot{A}$ и $\dot{B}$ — постоянные интегрирования; $J_0(qr)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода; $N_0(qr)$ — функция Бесселя нулевого порядка второго рода.

Функция $N_0(qr)$ обладает той особенностью, что при $qr = 0$ (т. е. на оси провода при $r = 0$) она обращается в бесконечность. Но из физических соображений ясно, что плотность тока должна быть всюду конечна, в том числе и на оси провода. Поэтому слагаемое $\dot{B} N_0(qr)$ в решении отбрасываем (принимая $\dot{B} = 0$). Следовательно,

$$\dot{\delta} = \dot{A} J_0(qr). \quad (23.35)$$

В соответствии с уравнением (23.31) и формулами (23.32) и (21.7)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}} &= \frac{1}{q^2} \operatorname{rot} \dot{\vec{\delta}} = \vec{\alpha}^0 \left(-\frac{1}{q^2} \frac{d\dot{\delta}}{dr} \right) = \vec{\alpha}^0 \dot{H}; \\ \dot{H} &= -\frac{1}{q^2} \frac{d}{dr} [\dot{A} J_0(qr)] = -\frac{\dot{A}}{q^2} \frac{d[J_0(qr)]}{d(qr)} \frac{d(qr)}{dr} = -\frac{\dot{A}}{q^2} q [-J_1(qr)] = \\ &= \frac{\dot{A}}{q} J_1(qr), \end{aligned}$$

т. е.

$$\dot{H} = \frac{\dot{A}}{q} J_1(qr), \quad (23.36)$$

где $J_1(qr)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Определим постоянную интегрирования $\dot{A}$. С этой целью по закону полного тока найдем $\dot{H}$ на поверхности провода (при $r = a$) и приравняем его значению $\dot{H}$, которое получается из формулы (23.36):

$$\frac{i}{2\pi a} = \frac{\dot{A}}{q} J_1(qa);$$

$$\dot{A} = \frac{qi}{2\pi a J_1(qa)}. \quad (23.37)$$

Подставим найденное значение $\dot{A}$ в формулы (23.35) и (23.36). Получим

$$\delta = \frac{qi J_0(qr)}{2\pi a J_1(qa)}; \quad (23.38)$$

$$\dot{H} = \frac{i J_1(qr)}{2\pi a J_1(qa)}. \quad (23.39)$$

С помощью этих формул можно определить комплекс плотности тока δ и комплекс напряженности поля $\dot{H}$ в любой точке сечения провода.

Радиус r может принимать значения от 0 до a . Для точки на оси провода $r = 0$; для точек на поверхности $r = a$. Так как $J(0) = 1$ (см. табл. 23.1), то плотность тока на оси провода:

$$\delta_0 = \frac{qi}{2\pi a J_1(qa)}. \quad (23.40)$$

Сопоставление (23.40) с (23.38) дает

$$\delta = \delta_0 J_0(qr). \quad (23.41)$$

Из формулы (23.41) следует, что плотность тока на поверхности провода:

$$\delta_a = \delta_0 J_0(qa). \quad (23.41')$$

Из предыдущего известно, что произведение qr есть комплексное число:

$$qr = r \sqrt{\omega \mu_a} \sqrt{-j}. \quad (23.42)$$

Бесселевы функции $J_0(qr)$ и $J_1(qr)$ от комплексного аргумента qr тоже являются комплексами и могут быть представлены в показательной форме:

$$J_0(qr) = b_0 e^{i\beta_0}; \quad (23.43)$$

$$J_1(qr) = b_1 e^{i\beta_1}, \quad (23.44)$$

где b_0 — модуль, а β_0 — аргумент функции $J_0(qr)$; b_1 — модуль, а β_1 — аргумент функции $J_1(qr)$; b_0 , b_1 , β_0 , β_1 (β_0 и β_1 в градусах) определяют по значению $r \sqrt{\omega \mu_a}$ с помощью табл. 23.1. При составлении этой таблицы наличие множителя $\sqrt{-j}$ в составе аргумента qr уже учтено.

Таблица модулей и аргументов функций $J_0(qr)$ и $J_1(qr)$

$r\sqrt{\omega\gamma\mu_a}$	b_1	β_0	b_1	β_1
0	1	0	0	-45,00
1	1,015	14,22	0,501	-37,84
2	1,229	52,28	1,041	-16,73
3	1,95	96,52	1,80	+15,71
4	3,439	138,19	3,173	53,90
5	6,231	178,93	5,812	93,55
6	11,501	219,62	10,850	133,45
7	21,548	260,29	20,50	173,51
8	40,82	300,92	39,07	213,69
9	77,96	341,52	74,97	253,95
10	149,8	382,10	144,58	294,27

Пример 222. По стальному проводу [$\gamma = 10^7$ (Ом·м) $^{-1}$; $\mu = 10^3$] диаметром 6,04 мм течет синусоидальный ток $\dot{I} = 100$ А частотой 50 Гц. Определить плотность тока на поверхности и на оси провода.

Решение.

$$\sqrt{\omega\gamma\mu_a} = \sqrt{2\pi \cdot 50 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 \cdot 10^7} = 1985 \text{ м}^{-1};$$

$$q = 1985 \sqrt{-j} = 1985e^{-j45^\circ}; \quad a\sqrt{\omega\gamma\mu_a} = 0,00302 \cdot 1985 = 6.$$

По табл. 23.1 найдем

$$J_0(qa) = J_0(6\sqrt{-j}) = 11,5e^{j219,6^\circ}; \quad b_0 = 11,5, \quad \beta_0 = 219,6^\circ;$$

$$J_1(qa) = J_1(6\sqrt{-j}) = 10,85e^{j133,45^\circ}, \quad b_1 = 10,85, \quad \beta_1 = 133,45^\circ.$$

По формуле (23.40) определим плотность на оси провода:

$$\delta_0 = \frac{q\dot{I}}{2\pi a J_1(qa)} = 96,5 \cdot 10^4 e^{-j178^\circ 30'} \text{ А/м}^2.$$

По формуле (23.42), плотность тока на поверхности провода:

$$\delta_a = \delta_0 J_0(qa) = 111 \cdot 10^5 e^{j41,1^\circ} \text{ А/м}^2.$$

§ 23.9. Применение теоремы Умова — Пойнтинга для определения активного и внутреннего индуктивного сопротивления проводников при переменном токе. Активное и внутреннее индуктивное сопротивления проводников при переменном токе часто определяют с помощью теоремы Умова — Пойнтинга в комплексной форме. С этой целью подсчитывают поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность проводника на длине в 1 м и делят его на квадрат тока, протекающего по проводнику; получают комплексное сопротивление проводника на единицу длины.

Действительно,

$$-\oint [\dot{\vec{E}} \vec{H}^*] d\vec{S} = P + jQ = I^2 R + jI^2 X = I^2 Z$$

и

$$Z = R + jX = \frac{-\oint [\dot{\vec{E}} \vec{H}^*] d\vec{S}}{I^2}.$$

В качестве примера определим активное и внутреннее индуктивное сопротивление цилиндрического провода (см. рис. 23.8) на длине 1 м:

$$Z = \frac{\dot{E}_a \vec{H}_a^* 2\pi a \cdot 1}{I^2} = \frac{\sqrt{\omega \mu_n} b_0 e^{-j45^\circ} e^{j\beta_0}}{2\pi \gamma a b_1 e^{j\beta_1}};$$

$$R = \frac{\sqrt{\omega \mu_n} b_0}{2\pi a \gamma b_1} \cos(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ); \quad X = \frac{\sqrt{\omega \mu_n} b_0}{2\pi a \gamma b_1} \sin(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ).$$

§ 23.10. Экранирование в переменном электромагнитном поле. Явление затухания электромагнитной волны в поверхностном слое металла используют для экранировки в переменном электромагнитном поле.

Электромагнитные экраны представляют собой полые цилиндрические, сферические или прямоугольные оболочки, внутрь которых помещают экранируемое устройство (например, катушку индуктивности, измерительный прибор и т. п.).

Экран выполняет две функции: 1) защищает устройство, заключенное в экран, от влияния внешнего по отношению к экрану электромагнитного поля; 2) защищает внешнее по отношению к экрану пространство от электромагнитного поля, создаваемого устройством, заключенным в экран.

Поскольку на расстоянии, равном длине волны, электромагнитная волна в металле почти полностью затухает, то для хорошей экранировки толщина стенки экрана должна быть примерно равна длине волны в металле. Практически приходится учитывать и другие факторы (механическую прочность экрана, его стоимость и т. д.).

§ 23.11. Сопоставление принципов экранирования в электростатическом, магнитном и электромагнитном полях. Экранирование в переменном электромагнитном поле основано, главным образом, на том, что электромагнитная волна, проникающая в стенки экрана, быстро затухает, расходуя энергию на покрытие потерь, обусловленных вихревыми токами в стенках экрана.

Электростатическое экранирование основано на компенсации внешнего поля полем зарядов, выявившихся на стенках экрана из проводящего материала вследствие электростатической индукции (см. § 19.21). Толщина стенок экрана при электростатическом экранировании в отличие от экранирования в магнитном и электромагнитном полях может быть сколь угодно малой.

Экранирование в магнитном поле постоянного тока (см. § 21.21) основано, грубо говоря, на том, что силовые линии магнитного поля преимущественно проходят по участкам с меньшим магнитным сопротивлением (по стенкам экрана).

§ 23.12. Высокочастотный нагрев металлических деталей и несовершенных диэлектриков. Нагрев металлических деталей перед ковкой и штамповкой, сушку древесины, наплавку и реставрацию инструментов часто производят путем помещения этих предметов (деталей) в электромагнитное поле сравнительно невысокой частоты (1—20 кГц). Стальные изделия (например, валы, шестеренки) нередко подвергают *поверхностной закалке*, помещая их в электромагнитное поле более высокой частоты (порядка 10—500 кГц).

В соответствии с § 22.7 энергия, выделяющаяся в виде тепла в проводящем теле, равна $\operatorname{Re} \left\{ -\oint_S [\dot{\vec{E}} \vec{H}^*] d\vec{S} \right\}$. Электромагнитная волна, проникая в толщу металла, быстро затухает. Поэтому теплота выделяется практически лишь в относительно тонком поверхностном слое стального изделия.

Под действием теплоты, выделившейся в поверхностном слое, последний быстро разогревается до температуры, необходимой для поверхностной закалки. Область еще более высоких частот (1—30 МГц) используется для высокочастотного *нагрева пластмасс* перед штамповкой, для *термической обработки* пищевых продуктов, *вулканизации* резины и для других целей.

Вопросы для самопроверки

1. От каких факторов зависит постоянная распространения $p = k + jk$ и волновое сопротивление Z_0 ? 2. Чем физически объясняется затухание волны по мере ее проникновения в проводящую среду? 3. Чем следует руководствоваться при проектировании электромагнитного экрана? 4. Какой процесс отображает фазовая скорость? 5. В чем отличие между электрическим и магнитным поверхностным эффектами? 6. В чем состоит эффект близости? 7. Составьте условие, при котором плотность тока на поверхности цилиндрического провода находится в противофазе с плотностью тока на оси провода. 8. Как применить теорему Умова—Пойнтинга для определения комплексного сопротивления провода? 9. Почему сердечник высокочастотного трансформатора выполняют из феррита, а низкочастотного — из листового материала? 10. Решите задачи 22.12; 22.20; 22.24; 22.28.

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОДНОРОДНОМ И ИЗОТРОПНОМ ДИЭЛЕКТРИКАХ И В ПОЛУПРОВОДЯЩИХ И ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

§ 24.1. Распространение электромагнитных волн в однородном и изотропном диэлектрике. Проводимость γ идеального диэлектрика равна нулю. Поэтому в первом уравнении Максвелла (22.1) первое слагаемое правой части ($\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$) выпадает, и уравнения Максвелла для диэлектрика получают следующий вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}; \quad (24.1)$$

$$\operatorname{div} \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}; \quad (24.2)$$

$$\operatorname{div} \dot{\vec{B}} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \dot{\vec{E}} = \frac{\rho_{\text{своб}}}{\epsilon_a}.$$

Для однородных и изотропных диэлектриков $\mu_a = \text{const}$ и условие $\text{div } \mu_a \dot{\vec{H}} = 0$ равносильно условию $\text{div } \dot{\vec{H}} = 0$.

Решим совместно уравнения (24.1) и (24.2). С этой целью возьмем ротор от уравнения (24.1). Получим $\text{rot rot } \dot{\vec{H}} = \text{grad div } \dot{\vec{H}} - \nabla^2 \dot{\vec{H}} = \underline{\underline{j\omega\epsilon_a}} \text{rot } \dot{\vec{E}}$.

Так как $\text{div } \dot{\vec{H}} = 0$, то и $\text{grad div } \dot{\vec{H}} = 0$. В свою очередь $\text{rot } \dot{\vec{E}}$ на основании второго уравнения Максвелла равен $-j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}$. Поэтому

$$-\nabla^2 \dot{\vec{H}} = j\omega\epsilon_a [-j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}]$$

или

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = -\omega^2 \epsilon_a \mu_a \dot{\vec{H}}. \quad (24.3')$$

Произведение $\epsilon_a \mu_a$ измеряется в $\text{с}^2/\text{м}^2$:

$$[\epsilon_a][\mu_a] = \frac{A \cdot c}{B \cdot M} \frac{B \cdot c}{A \cdot M} = \text{с}^2/\text{м}^2,$$

т. е. $\epsilon_a \mu_a$ имеет размерность, обратную размерности квадрата скорости, и потому можно принять $\epsilon_a \mu_a = 1/v^2$. После введения такого обозначения уравнение (24.3') получает следующий вид:

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \dot{\vec{H}}. \quad (24.3)$$

Для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении оси z в соответствии с предыдущим, можно принять, что напряженность магнитного поля направлена вдоль оси y , т. е.

$$\dot{\vec{H}} = \vec{j} \dot{H}. \quad (24.4)$$

Так как для плоской волны $\dot{\vec{H}}$ зависит только от координаты z и не зависит от координат x и y , то уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \vec{j} \dot{H} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \vec{j} \dot{H}$$

приобретает следующий вид:

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \dot{H}. \quad (24.5)$$

Уравнению (24.5) соответствует характеристическое уравнение $p^2 = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2$, корни которого $p_1 = j \frac{\omega}{v}$ и $p_2 = -j \frac{\omega}{v}$.

Общее решение уравнения (24.4):

$$\dot{H} = \dot{C}_1 e^{j \frac{\omega}{v} z} + \dot{C}_2 e^{-j \frac{\omega}{v} z}, \quad (24.6)$$

где $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ — комплексные коэффициенты, зависящие от граничных условий. Как и всякое комплексное число, их можно представить в показательной форме: $\dot{C}_1 = C_1 e^{j\psi_1}$ и $\dot{C}_2 = C_2 e^{j\psi_2}$.

Слагаемое $\dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z}$ представляет собой падающую волну, продвигающуюся в положительном направлении оси z , а слагаемое $\dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z}$ — отраженную волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси z .

Напряженность электрического поля $\vec{E}$ найдем по уравнению (24.1):

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \operatorname{rot} \vec{H}.$$

Как следует из предыдущего [см. формулу (23.10)], для плоской волны

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{i} \left(-\frac{dH}{dz} \right).$$

Поэтому

$$\vec{E} = \vec{i} \left\{ \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \left[\left(-j\frac{\omega}{v} \right) \left(\dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z} - \dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z} \right) \right] \right\}.$$

Величину $\frac{1}{\epsilon_a v} = \frac{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}{\epsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ называют *волновым сопротивлением диэлектрика*: $Z_B = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}$.

Волновое сопротивление является чисто действительным числом (измеряется в омах):

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} = \sqrt{\frac{1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Г/м} \cdot \mu}{8,86 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \cdot \epsilon}} = 377 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \text{ Ом}.$$

Оно не зависит от угловой частоты колебаний ω . Для вакуума $\epsilon = 1$ и $\mu = 1$, поэтому $Z_B = 377 \text{ Ом}$. Следовательно,

$$\vec{E} = \vec{i} \dot{E}, \quad (24.7)$$

где

$$\dot{E} = Z_B \dot{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z} - Z_B \dot{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z}.$$

Присутствие единичного орта оси x (орта $\vec{i}$) в формуле (24.7) свидетельствует о том, что вектор напряженности электрического поля направлен по оси x .

Таким образом, в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в диэлектрике, как и для проводящей среды, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны: $\vec{H}$ направлено по оси y , $\vec{E}$ — по оси x .

Запишем выражения для мгновенных значений H и E падающей волны. Чтобы получить мгновенное значение падающей волны H , необходимо комплекс $\dot{H} = \dot{C}_2 e^{j\psi_n} e^{-j\frac{\omega}{v}z}$ умножить на $e^{j\omega t}$ и от произведения взять мнимую часть. В результате получим

$$H = \dot{C}_2 \sin \left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v} z \right); \quad (24.8)$$

аналогично,

$$E = C_2 Z_B \sin \left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v} z \right). \quad (24.9)$$

По мере продвижения падающей волны вдоль оси z амплитуды E и H остаются неизменными, т. е. затухания волны не происходит, так как в диэлектрике нет токов проводимости и выделения энергии в виде теплоты.

На рис. 24.1 изображены пространственные кривые, представляющие собой графики мгновенных значений H и E . Эти графики построены по уравнениям (24.8) и (24.9) для момента времени $\omega t + \psi_n = 0$.

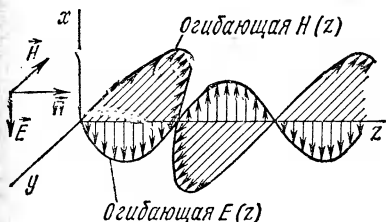


Рис. 24.1

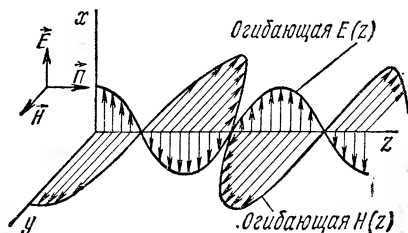


Рис. 24.2

Для более позднего момента времени, например для $\omega t + \psi_n = 90^\circ$, аналогичные кривые изображены на рис. 24.2.

Как видно из рис. 24.1 и 24.2, вектор $\vec{E}$ при его изменении остается направленным в плоской волне вдоль оси x , а вектор $\vec{H}$ — вдоль оси y , сдвига по фазе между H и E нет.

Проверим правильность построения графика $E = f(z)$ на рис. 24.1. Кривые на рис. 24.1 построены при $\omega t + \psi_n = 0$, поэтому уравнением кривой $E = f(z)$ является выражение [в соответствии с (24.9)]:

$$E_{\text{при } \omega t + \psi_n = 0} = C_2 Z_B \sin \left(-\frac{\omega}{v} z \right).$$

При $z = 0$ $E = 0$. В интервале от $\frac{\omega}{v} z = 0$ до $\frac{\omega}{v} z = \pi$ мгновенное значение E отрицательно. При $\frac{\omega}{v} z = \pi$ $E = 0$ и т. д.

Вектор Пойнтинга падающей волны направлен вдоль оси z . Модуль Π изменяется по закону

$$\Pi = C_2^2 Z_B \sin^2 \left(\omega t - \frac{\omega}{v} z + \psi_n \right).$$

Так как

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

то

$$\Pi = \frac{C_2^2 Z_B}{2} \left[1 - \cos \left(2\omega t - \frac{2\omega}{v} z + 2\psi_n \right) \right],$$

т. е. вектор Пойнтинга имеет постоянную составляющую $\frac{C_3 Z_R}{2}$ и переменную, изменяющуюся во времени с двойной угловой частотой.

Фазовая скорость электромагнитной волны в диэлектрике:

$$v_{\text{фаз}} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}. \quad (24.10)$$

Если волна распространяется в вакууме, то $\epsilon_a = \epsilon_0$ и $\mu_a = \mu_0$, и тогда фазовая скорость равна скорости света:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}}} \approx 300\,000 \text{ км/с.}$$

Таким образом, фазовая скорость электромагнитной волны в диэлектрике очень велика, и она несоизмеримо больше фазовой скорости плоской электромагнитной волны в проводящей среде.

Длина волны λ есть расстояние вдоль оси z , на котором фаза колебания изменится на 2π . Ее находят из соотношения $\frac{\omega}{v} \lambda = 2\pi$.

Отсюда

$$\lambda = v/f. \quad (24.11)$$

Из (24.11) видно, что длина волны в диэлектрике обратно пропорциональна частоте f . Так, при $f = 10^6$ Гц $\lambda = \frac{300\,000 \text{ км/с}}{10^6 \text{ с}^{-1}} = 300 \text{ м}$.

Пример 223. В плоскости $z = 0$ напряженность электрического поля плоской волны изменяется по закону $E = E_m \sin(\omega t + \psi_n)$, где $E_m = 0,2$ В/м, $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$ и $\psi_n = 30^\circ$; диэлектрик — воздух.

Записать выражения для мгновенного значения напряженности магнитного поля и вектора Пойнтинга в плоскости $z = 0,5$ км.

Решение.

$$H = \frac{E_m}{Z_B} \sin\left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v} z\right); \quad \frac{E_m}{Z_B} = \frac{2 \cdot 10^{-1}}{377} = 5,315 \cdot 10^{-4} \text{ А/м;}$$

$$\frac{\omega}{v} z = \frac{10^6 \cdot 0,5}{3 \cdot 10^8} = 1,665 \text{ рад} \approx 95^\circ 20'.$$

Следовательно, $H = 5,315 \cdot 10^{-4} \sin(10^6 t - 65^\circ 20') \text{ А/м}$. Мгновенное значение вектора Пойнтинга при $z = 0,5$ км:

$$\begin{aligned} P &= \frac{E_m H_m}{2} \left[1 - \cos\left(2\omega t + 2\psi_n - \frac{2\omega z}{v}\right) \right] = \\ &= 5,315 \cdot 10^{-5} [1 - \cos(2 \cdot 10^6 t - 130^\circ 40')] \text{ Вт/м}^2. \end{aligned}$$

§ 24.2. Плоские волны в однородных и изотропных полупроводящих средах. Кратко рассмотрим вопрос о распространении плоской электромагнитной волны в однородных и изотропных полупроводящих средах (морской воде, почве, ионосфере, ферритах). При достаточно высоких частотах токи проводимости и токи смещения в полупроводящих средах оказываются соизмеримыми. Уравнения $\text{rot } \dot{H} = (\gamma +$

$+j\omega\epsilon_a\dot{E}$ и $\text{rot } \dot{E} = -j\omega\mu_a\dot{H}$ после введения обозначений $\epsilon_1 = \epsilon_a - j\frac{\gamma}{\omega} = \epsilon_a - j\epsilon'$, где $\epsilon' = \gamma/\omega$, для плоской волны приводятся к следующему:

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = -\omega^2 \epsilon_1 \mu_a H. \quad (a)$$

Последнему соответствует характеристическое уравнение $p^2 = -\omega^2 \epsilon_1 \mu_a$. Решение уравнения (a) $H = C_1 e^{p_1 z} + C_2 e^{p_2 z}$, где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, зависящие от граничных условий. Постоянные распространения:

$$p_1 = \beta + j\frac{\omega}{v_1} \quad \text{и} \quad p_2 = -\beta - j\frac{\omega}{v_1}.$$

Коэффициент затухания

$$\beta = \frac{\omega}{v_1} \frac{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}{2} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon_a}\right)^2}}$$

и фазовая скорость

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon_a}\right)^2}}}$$

зависят от величины $\frac{\epsilon'}{\epsilon_a}$. При выводе использованы формулы

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \text{и} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

Напряженность электрического поля для падающей волны $\dot{E}_n = \dot{H}_n Z_v$, где волновое сопротивление

$$Z_v = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\epsilon'}{\epsilon_a}}}.$$

Сдвиг по фазе между $\dot{E}_n$ и $\dot{H}_n$ находится в интервале от 0 до 45° в зависимости от соотношения между 1 и ϵ'/ϵ_a .

Заметим, что параметры ϵ , γ и μ полупроводящих сред являются функцией частоты и комплексными числами (ср. с § 22.8). Эти зависимости должны быть известны перед проведением расчета. Для ферритов решение приближенно, так как μ ферритов зависит еще и от величины напряженности магнитного поля.

Среды с потерями, для которых фазовая скорость и коэффициент затухания зависят от частоты, называют *диспергирующими*.

В заключение коснемся понятия групповой скорости. Оно используется главным образом при рассмотрении вопроса о распространении радиосигналов в среде с потерями. Так как радиосигнал образован совокупностью волн, имеющих разные частоты, а β и v_1 зависят от ω , то огибающая импульса при его движении в среде с потерями непрерывно деформируется. *Групповой скоростью* называют скорость перемещения максимума огибающей сигнала (импульса), так как скорость перемещения этого максимума характеризует скорость перемещения энергии группы волн.

Выведем приближенную формулу для групповой скорости распространения волн в полупроводящей среде. Положим, что вдоль оси z распространяются два колебания $A \sin \omega t$ и $A \sin (\omega + \Delta \omega) t$.

Для частоты ω $p = \beta + j\alpha$ ($\alpha = \omega/v_1$), для частоты $\omega + \Delta \omega$ $p = \beta + \Delta \beta + j(\alpha + \Delta \alpha)$. Сумма колебаний вдоль оси z :

$$Ae^{-\beta z} \sin (\omega t - \alpha z) + Ae^{-\beta z} e^{-\Delta \beta z} \sin [(\omega + \Delta \omega) t - (\alpha + \Delta \alpha) z].$$

Полагая, что $\Delta bz \ll 1$ и $e^{-\beta \Delta z} \approx 1$, и используя формулу $\sin v + \sin \rho = 2 \cos \frac{v-\rho}{2} \sin \frac{v+\rho}{2}$, получим

$$2Ae^{-\beta z} \cos \left(\frac{\Delta \omega}{2} t - \frac{\Delta \alpha}{2} z \right) \sin \left[\left(\omega + \frac{\Delta \omega}{2} \right) t - \left(\alpha + \frac{\Delta \alpha}{2} \right) z \right].$$

Скорость перемещения огибающей результирующего колебания вдоль оси z найдем, взяв производную по времени от аргумента $\frac{\Delta \omega}{2} t - \frac{\Delta \alpha}{2} z$, полагая его постоянным: $v_{\text{гр}} = \frac{\Delta \omega}{\Delta \alpha} \approx \frac{1}{d\alpha/d\omega}$.

При $e^{-\beta \Delta z}$, заметно отличающемся от 1, форма сигнала при его движении вдоль оси z настолько деформируется, что исчезает информация, заключенная в сигнале. В этом случае понятие $v_{\text{гр}}$ теряет смысл.

§ 24.3. Граничные условия на поверхности раздела двух полупроводящих сред. Граничные условия на поверхности раздела двух полупроводящих сред обобщают граничные условия на границе раздела двух идеальных диэлектриков (см. § 19.24) и граничные условия на границе раздела двух проводящих сред (см. § 20.6).

Запишем граничные условия для синусоидальной изменяющегося поля (потому над $\vec{E}$ ставим точку), частным случаем которого является поле, неизменное во времени. Формула (19.24), совпадающая с формулой (20.10), справедлива и для полупроводящей среды; только, учитывая синусоидальный характер поля во времени, ставим точки над $\vec{E}$:

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}. \quad (24.12)$$

Формулы (19.35) и (20.11) различны и поэтому следует образовать более общее выражение, частными случаями которого были бы эти формулы. С этой целью возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения $\text{rot } \dot{\vec{H}} = (\gamma + j\omega \epsilon_a) \dot{\vec{E}}$. Так как $\text{div rot } \dot{\vec{H}} \equiv 0$, то и

$$\text{div } (\gamma + j\omega \epsilon_a) \dot{\vec{E}} = 0. \quad (24.13)$$

На границе раздела двух полупроводящих сред выделим прямой сплюснутый параллелепипед очень малых размеров. Его донышко находится в одной среде, а крышка — в другой. Из (24.13) следует, что:

$$(\gamma_1 + j\omega \epsilon_{a1}) \dot{E}_{1n} = (\gamma_2 + j\omega \epsilon_{a2}) \dot{E}_{2n}. \quad (24.14)$$

Формулы (24.12) и (24.14) представляют искомые граничные условия.

§ 24.4. Переходные и релаксационные процессы в несовершенных диэлектриках. Процессы в полупроводящих средах должны удовлетворять уравнению непрерывности:

$$\text{div } \vec{\delta} = - \frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} \quad (24.15)$$

и теореме Гаусса:

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{своб}}. \quad (24.16)$$

В соответствии с законом Ома в уравнение (24.15) подставим $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$:

$$\vec{E} \text{ grad } \gamma + \gamma \text{ div } \vec{E} = - \frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t}. \quad (24.15')$$

В уравнении (24.16) заменим $\vec{D}$ на $\epsilon_a \vec{E}$:

$$\text{grad } \epsilon_a \vec{E} + \epsilon_a \text{ div } \vec{E} = \rho_{\text{своб}}. \quad (24.16')$$

Из (24.16') найдем:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}} - \vec{E} \operatorname{grad} \epsilon_a}{\epsilon_a}. \quad (24.17)$$

Подставим (24.17) в (24.15'):

$$\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_a} \rho_{\text{своб}} = \frac{\gamma}{\epsilon_a} \vec{E} \operatorname{grad} \epsilon_a - \vec{E} \operatorname{grad} \gamma. \quad (24.18)$$

Преобразуем правую часть (24.18):

$$\vec{E} \gamma \frac{1}{\epsilon_a} \left(\frac{1}{\gamma} \operatorname{grad} \epsilon_a - \frac{\epsilon_a}{\gamma^2} \operatorname{grad} \gamma \right) = \vec{\delta} \frac{\gamma}{\epsilon_a} \operatorname{grad} \left(\frac{\epsilon_a}{\gamma} \right),$$

или

$$\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_a} \rho_{\text{своб}} = \frac{\gamma}{\epsilon_a} \vec{\delta} \operatorname{grad} \left(\frac{\epsilon_a}{\gamma} \right). \quad (24.18')$$

Уравнение (24.18') является дифференциальным уравнением относительно свободного объемного заряда. Оно описывает переходные и установившиеся процессы в самой полупроводящей среде (не идеальном диэлектрике).

В установившемся режиме $\rho_{\text{своб}} = \vec{\delta} \operatorname{grad} \left(\frac{\epsilon_a}{\gamma} \right)$. Если среда однородна ($\epsilon_a/\gamma = \text{const}$), то в установившемся режиме свободный объемный заряд не накапливается, т. е. $\rho_{\text{своб}} = 0$. Переходные процессы в однородной полупроводящей среде описываются уравнением $\frac{\partial \rho_{\text{своб}}}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_a} \rho_{\text{своб}} = 0$. Если к началу переходного процесса при $t = 0_-$ $\rho_{\text{своб}} = \rho_{\text{своб}}(0_-)$, то объемный заряд в этой точке поля рассасывается по экспоненте $\rho_{\text{своб}} = \rho_{\text{своб}}(0_-) e^{-\frac{\gamma}{\epsilon_a} t}$.

Время уменьшения $\rho_{\text{своб}}$ в $e = 2,72$ раза называют *временем релаксации*. В несовершенной изоляции время релаксации может составлять от нескольких единиц до нескольких десятков секунд. Если конденсатор с несовершенной изоляцией, находящийся под напряжением, отключить от источника напряжения, затем на некоторое время замкнуть проводником накоротко и этот проводник убрать, то на зажимах отключенного от сети конденсатора вновь появится напряжение за счет рассасывания объемного заряда. В металлах время релаксации составляет около 10^{-17} с, т. е. рассасывание объемного заряда происходит практически мгновенно.

§ 24.5. О расчете полей в несовершенных диэлектриках и вязких средах при установившемся синусоидальном режиме. В соответствии с § 24.3 в синусоидально изменяющемся поле проводимость является комплексным числом $\tilde{\gamma} = \gamma + j\omega\epsilon_a$.

Изменяющийся во времени ток, протекающий по несовершенному диэлектрику, создает в нем изменяющееся во времени магнитное поле. Однако если последнее слабо, то его влиянием на электрическое поле в первом приближении можно пренебречь и рассчитывать электрическое поле в полупроводящих средах по формулам для статических полей в проводящих средах, вводя в соответствующие формулы комплексную $\tilde{\gamma}$ вместо вещественной γ . А так как формулы для расчета электрических полей в проводящих средах в условиях статики следуют из формул для расчета соответствующих электростатических задач (см. § 19.32—19.36, 19.39, 19.40 и др.), то надлежит использовать формулы электростатики, заменяя в них ϵ на $\tilde{\gamma}$.

Аналогичный подход применяют при расчетах квазистатических электрических полей в вязких диэлектриках, вводя комплексное $\tilde{\epsilon}_a$, и при расчетах квазистатических магнитных полей в магнитно вязких материалах при отсутствии вихревых токов (в ферритах), вводя комплексное $\tilde{\mu}_a$.

§ 24.6. Определение гиротропной среды. Гиротропными (вращающими) называют среды, в которых плоскость поляризации электромагнитной волны поворачивается по мере распространения волны вдоль некоторого направления.

В гиротропной среде μ или ϵ для малых переменных составляющих является тензором. Наиболее распространенными на практике магнитными гиротропными (гиромангнитными) средами являются намагниченные постоянным магнитным полем ферриты (у них тензором является $\vec{\mu}_a$) и намагниченные постоянным магнитным полем ионизованные газы — giroэлектрические среды (у них тензор — $\vec{\epsilon}_a$). Далее в качестве гиротропной среды будет использоваться феррит.

§ 24.7. Тензор магнитной проницаемости феррита. Сначала вспомним, что называют прецессией.

Из механики известно, что скорость изменения момента количества движения $(d\vec{M})/(dt)$, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью ω волчка (гироскопа), равна приложенному к нему вращающему моменту (рис. 24.3, а):

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{r} \vec{F}]. \quad (24.19)$$

Здесь $\vec{r}$ — расстояние волчка от вертикальной оси z ; $\vec{F}$ — сила тяжести.

Радиус R вращающегося волчка описывает боковую поверхность конуса. Такое движение называют *прецессией*.

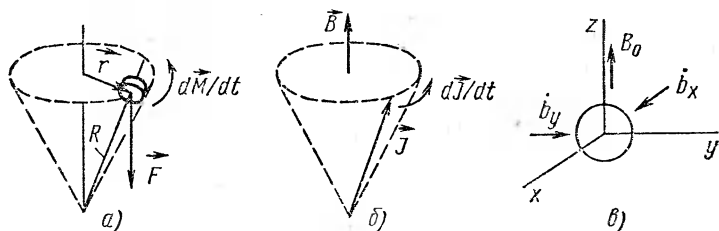


Рис. 24.3

В феррите, помещенном в постоянное магнитное поле индукции $\vec{B} = \vec{k}B$, вектор намагниченности $\vec{J}$ единицы объема вещества совершает прецессионное движение подобно вращающемуся волчку (рис. 24.3, б). Если не учитывать создаваемое вязким трением затухание, прецессия описывается уравнением Ландау—Лившица

$$(d\vec{J})/(dt) = \gamma [\vec{B} \vec{J}], \quad (24.20)$$

где коэффициент $\gamma = 1,756 \cdot 10^{11} \text{ T}^{-1} \text{ c}^{-1}$.

При наличии вязкого трения индукция $\vec{B}$ оказывается уменьшенной на величину, пропорциональную скорости изменения $(d\vec{J})/(dt)$, $\vec{B} = \mu_0 \alpha \frac{d\vec{J}}{dt}$, поэтому

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \gamma \left[\left(\vec{B} - \mu_0 \alpha \frac{d\vec{J}}{dt} \right) \vec{J} \right]. \quad (24.21)$$

Если в начало координат поместить малую ферритовую сферу рис. 24.3, а и постоянное магнитное поле индукции B_0 направить по оси z , а малое по амплитуде

синусоидально-изменяющееся переменное поле индукции $\vec{b}$ частоты ω направить по осям x и y , $\vec{b} = \vec{i}\dot{b}_x + \vec{j}\dot{b}_y$, то $\vec{B} = \vec{i}\dot{b}_x + \vec{j}\dot{b}_y + \vec{k}B_0$. В свою очередь намагниченность $\vec{J} = \vec{i}j_x + \vec{j}j_y + \vec{k}(J_0 + j_z)$.

Учитывая временной фактор множителем $e^{i\omega t}$, производную $(d\vec{J})/(dt)$ заменим на $j\omega(\vec{i}j_x + \vec{j}j_y + \vec{k}j_z)$. После подстановки всех величин в (24.21), пренебрежения слагаемыми второго порядка малости (например, произведением $\dot{b}_x j_y$), окажется, что j_x зависит не только от $\dot{b}_x$, но и от $\dot{b}_y$, а j_y не только от $\dot{b}_y$, но и от $\dot{b}_x$:

$$j_x = k_{xx} \frac{\dot{b}_x}{\mu_0} + k_{xy} \frac{\dot{b}_y}{\mu_0}; \quad j_y = k_{yx} \frac{\dot{b}_x}{\mu_0} + k_{yy} \frac{\dot{b}_y}{\mu_0};$$

$$k_{xx} = k_{yy} = \frac{1}{m} (B_0 + j\omega\mu_0\alpha J_0) \mu_0 J_0 \gamma^2; \quad k_{xy} = -k_{yx} = -j\omega\gamma\mu_0 J_0 / m;$$

$$m = \gamma^2 (B_0 + j\omega\mu_0\alpha J_0)^2 - \omega^2.$$

Коэффициенты k_{xx} и k_{xy} играют роль магнитной восприимчивости. Коэффициент k_{xx} имеет действительную k_{xx1} и мнимую k_{xx2} части. Аналогично две части имеет и k_{xy} . При $\omega = \omega_0 = \frac{B_0}{\sqrt{\alpha^2 \mu_0^2 J_0^2 + \gamma^{-2}}}$ действительная часть m равна нулю. При этом

k_{xx1} достигает максимума и наблюдается гиромагнитный резонанс. Когда вязкое трение отсутствует, $\alpha = 0$ и $\omega = \omega_p = \gamma B_0$. При $B_0 = 1T$ $\omega_p = 1,75 \cdot 10^{11} \text{с}^{-1}$.

Если $\vec{b} = \vec{j}\dot{b}_x$ ($b_y = 0$), то $j_x = \frac{B_0}{\gamma^2 B_0^2 - \omega^2}$ и $j_y = \frac{-j\omega\gamma J_0}{\gamma^2 B_0^2 - \omega^2}$, т. е. несмотря на то, что $b_y = 0$, переменная составляющая вектора $\vec{J}$ имеет компоненты по осям x и y , сдвинутые во времени на 90° (множитель $-j$ у j_y). Это означает, что поле вектора $\vec{J}$ поляризовано в плоскости xoy .

Тензор абсолютной проницаемости $\vec{\mu}_a$ феррита, намагничиваемого постоянным магнитным полем индукции $\vec{B}_0$, направленным по оси z , и малым переменным полем по осям x и y , следующий:

$$\vec{\mu}_a = \mu \begin{bmatrix} \mu & -jc & 0 \\ jc & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}; \quad (24.22)$$

$$\mu = 1 + k_{xx}, \quad c = \frac{\omega\gamma\mu_0 J_0}{m}, \quad \mu_z = 1 + k_0,$$

k_0 — восприимчивость феррита в постоянном магнитном поле.

§ 24.8. Распространение плоской волны в гиромагнитной среде. Положим, что в феррите в направлении оси z , вдоль которой направлено постоянное магнитное поле индукции B_0 , распространяется плоская электромагнитная волна частоты ω . В соответствии с формулой (24.22)

$$\vec{B}_x = \mu_0 (\mu H_x - jc H_y); \quad \vec{B}_y = \mu_0 (jc H_x + \mu H_y); \quad \vec{B}_z = \mu_0 \mu_z H_z.$$

$$\vec{E}_z = H_z = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0; \quad \vec{E} = \vec{i}\vec{E}_x + \vec{j}\vec{E}_y.$$

Подставим в уравнения Максвелла $\text{rot } \vec{H} = j\omega\epsilon_a \vec{E}$ и $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, значения $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Получим

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\vec{H}_y}{dz} &= j\omega\epsilon_a \vec{E}_x; & \frac{dH_x}{dz} &= j\omega\epsilon_a \vec{E}_y; & -\frac{d\vec{E}_y}{dz} &= -j\omega\mu_0 (\mu \vec{H}_x - jc \vec{H}_y), \\ \frac{d\vec{E}_x}{dz} &= -j\omega\mu_0 (jc H_x + \mu H_y). \end{aligned} \right\} \quad (24.23)$$

Полагаем, что потери в феррите отсутствуют, и поэтому волна будет распространяться без затухания. Тогда можно принять

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{0x} \bar{e}^{-j\rho z}; \quad \dot{E}_y = \dot{E}_{0y} \bar{e}^{-j\rho z}; \quad \dot{H}_x = \dot{H}_{0x} \bar{e}^{-j\rho z}; \quad \dot{H}_y = \dot{H}_{0y} \bar{e}^{-j\rho z}. \quad (24.24)$$

$\dot{E}_{0x}$, $\dot{E}_{0y}$, $\dot{H}_{0x}$ и $\dot{H}_{0y}$ — значения $\dot{E}_x$, $\dot{E}_y$, $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_y$ при $z = 0$.

Совместно решая (24.23) с учетом (20.24), получим:

$$\left. \begin{aligned} p\dot{H}_{0y} &= \omega \epsilon_a \dot{E}_{0x}; & p\dot{H}_{0x} &= -\omega \epsilon_a \dot{E}_{0y}; \\ p\dot{E}_{0y} &= -\omega \mu_0 (\mu \dot{H}_{0x} - jc \dot{H}_{0y}); & p\dot{E}_{0x} &= \omega \mu_0 (jc \dot{H}_{0x} + \mu \dot{H}_{0y}). \end{aligned} \right\} \quad (24.25)$$

Из первых двух уравнений (24.25) найдем $\dot{H}_{0y}$ и $\dot{H}_{0x}$ и подставим в остальные два уравнения:

$$(p^2 - \epsilon_a \omega^2 \mu_0) \dot{E}_{0y} = jc \epsilon_a \omega^2 \mu_0 \dot{E}_{0x}; \quad (24.26)$$

$$(p^2 - \mu_0 \omega^2 \epsilon_a) \dot{E}_{0x} = -jc \mu_0 \omega^2 \epsilon_a \dot{E}_{0y}. \quad (24.27)$$

Совместно решая (24.26) и (24.27), получим уравнение относительно p :

$$(p^2 - \epsilon_a \mu_0 \omega^2 - m \epsilon_a \mu_0 \omega^2) (p^2 - \epsilon_a \mu_0 \omega^2 + m \epsilon_a \omega^2 \mu_0) = 0. \quad (24.28)$$

Уравнение (20.28) имеет два корня, удовлетворяющих условию задачи $p^+ = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_0 (\mu + c)}$ и $p^- = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_0 (\mu - c)}$.

Подставляя найденные значения p в (24.26) и (24.27), найдем $\dot{E}_{0y} = \pm j \dot{E}_{0x}$.

Если $p = p^+$, то $\dot{E}_{0y} = +j \dot{E}_{0x}$, т. е. $\dot{E}_{0y}$ по фазе опережает $\dot{E}_{0x}$ на 90° , этому соответствует правое вращение плоскости поляризации и фазовая скорость

$v^+ = \frac{\omega}{p^+} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_0 (\mu + c)}}$. Если $p = p^-$ то $\dot{E}_{0y} = -j \dot{E}_{0x}$, т. е. $\dot{E}_{0y}$ отстает от $\dot{E}_{0x}$ на 90° — левое вращение плоскости поляризации, ему соответствует фазовая скорость

$v^- = \frac{\omega}{p^-} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_0 (\mu - c)}}$.

Положим, что вдоль оси z распространяется волна, компоненты которой, соответствующие правой и левой поляризации, имеют одинаковые амплитуды E_m :

$$\begin{aligned} E_x^+ &= E_m \sin(\omega t - p^+ z), & E_y^+ &= E_m \cos(\omega t - p^+ z); \\ E_x^- &= E_m \sin(\omega t - p^- z), & E_y^- &= -E_m \cos(\omega t - p^- z). \end{aligned}$$

Проекция суммы напряженностей на оси x и y :

$$\begin{aligned} E_x &= E_x^+ + E_x^- = 2E_m \cos[0,5(p^+ - p^-)z] \sin[\omega t - 0,5(p^+ + p^-)z]; \\ E_y &= E_y^+ + E_y^- = 2E_m \sin[0,5(p^+ - p^-)z] \sin[\omega t - 0,5(p^+ + p^-)z]. \end{aligned}$$

Результирующая напряженность поля:

$$E_p = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 2E_m \sin[\omega t - 0,5(p^+ + p^-)z].$$

Волна поляризована в плоскости, проходящей через вектор $\vec{E}_p$ и ось z . Тангенс угла β между вектором $\vec{E}_p$ и осью x $\operatorname{tg} \beta = \frac{E_y}{E_x} = \operatorname{tg}[0,5(p^+ - p^-)z]$.

Угол β увеличивается пропорционально расстоянию z . Среда называется *гиротропной* (вращающей) потому, что плоскость поляризации волны непрерывно поворачивается с ростом z (эффект Фарадея).

Если электромагнитная волна будет распространяться вдоль оси $-z$ (т. е. встречно постоянному полю B_0), то коэффициент c изменит знак, в результате направление вращения плоскости поляризации (если смотреть вслед волне) сохранится прежним, а не изменится на противоположное, т. е. для гиротропной среды не выполняется принцип взаимности.

Эффект вращения плоскости поляризации волны используется для создания вентильных свойств волноводного тракта, например, в устройстве, называемом

циркулятором (отрезок волноводного тракта, заполненного ферритом), с двух сторон которого находятся поляризаторы. В волноводе с таким устройством электромагнитная волна может проходить только в одном направлении, а в другом она задерживается одним из поляризаторов.

Вопросы для самопроверки

1. На какую долю процента скорость света в воздухе ($\epsilon = 1,0006$) и волновое сопротивление меньше, чем в вакууме? 2. В некоторой точке диэлектрика $\vec{E} = i\vec{E}_m \sin \omega t$. Определите $\vec{H}$ и $\text{rot } \vec{H}$ в этой точке. 3. В некоторой точке диэлектрика $\vec{H} = i\vec{H}_m \cos \omega t$. Определите $\vec{E}$ и $\text{rot } \vec{E}$ в этой точке. 4. При какой частоте амплитуда плотности тока проводимости равна амплитуде плотности тока смещения для сухой почвы, у которой $\gamma = 10^{-3} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$? 5. Каковы особенности распространения электромагнитных волн в полупроводящей среде и в гиротропной среде? 6. Из формул для Z_B , v_Φ и коэффициента распространения для полупроводящей среды получите формулы соответствующих величин для диэлектрика и для проводящей среды. 7. Из граничных условий для полупроводящей среды получите граничные условия для диэлектрика и для проводящей среды. 8. Решите задачи: 22.15; 22.16; 22.17; 22.46; 22.47.

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ПЯТАЯ

ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

§ 25.1. Вывод уравнений для $\vec{A}$ и φ в переменном электромагнитном поле и их решение. Переменное электромагнитное поле создается токами и зарядами, зависящими не только от координат, но и от времени. Рассмотрим, каким уравнениям подчиняются векторный и скалярный потенциалы $\vec{A}$ и φ в переменном электромагнитном поле. С этой целью выпишем систему уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (25.1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (25.2)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0; \quad (25.3)$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{\text{своб}}^*}{\epsilon_a}. \quad (25.4)$$

Дополним ее уравнением непрерывности:

$$\text{div } \vec{\delta} = -\frac{d\rho}{dt} \quad (25.5)$$

и выражением магнитной индукции через векторный потенциал:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (25.6)$$

* В дальнейшем индекс «своб» писать не будем.

Для того чтобы составить уравнение относительно векторного потенциала, необходимо проделать ряд выкладок. Умножив (25.1) на μ_a , получим

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_a \vec{\delta} + \mu_a \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

В последнем уравнении заменим $\mu_a \epsilon_a$ на $1/v^2$:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_a \vec{\delta} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (25.7)$$

В (25.7) вместо $\vec{B}$ подставим $\text{rot } \vec{A}$, получим

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu_a \vec{\delta} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

или

$$\text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{\delta} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (25.8)$$

Затем в (25.2) вместо $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ подставим $\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (операция взятия ротора и дифференцирование во времени не зависят друг от друга и потому взаимно переместимы). Тогда (25.2) приобретает следующий вид:

$$\text{rot } \vec{E} = - \text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (25.9)$$

Если равны роторы от двух функций (от $\vec{E}$ и $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$), то сами функции равны с точностью до градиента от некоторой скалярной функции. Объясняется это тем, что ротор от градиента скалярной функции тождественно равен нулю ($\text{rot grad } \varphi \equiv 0$).

Таким образом,

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \quad (25.10)$$

В (25.10) в качестве градиента скалярной функции взят $\text{grad } \varphi$. Объясняется это тем, что уравнение (25.10) должно быть справедливо и для статического поля. А так как в статическом поле $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$, то выражение, которое получается из (25.10) для статического поля, должно совпадать с известным из электростатики выражением: $\vec{E} = - \text{grad } \varphi$.

В соответствии с (25.10) можно сказать, что в переменном электромагнитном поле напряженность электрического поля имеет две составляющие. Одна из них $\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$ обусловлена переменным магнитным

полем, другая ($-\text{grad } \varphi$) — неподвижными зарядами*. Возьмем циркуляцию от вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{A} d\vec{l} - \oint \text{grad } \varphi d\vec{l}.$$

Циркуляция от градиента φ тождественно равна нулю, а $\oint \vec{A} d\vec{l}$ в соответствии с уравнением (21.26) есть магнитный поток Φ , пронизывающий выбранный контур. Таким образом,

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (25.10')$$

т. е. из (25.10) получили (25.10') — закон электромагнитной индукции.

Обратим внимание на то, что формула (25.10), определяющая $\vec{E}$, записана для случая неподвижных тел и сред и при отсутствии сторонней напряженности поля $\vec{E}_{\text{стор}}$, возникающей, например, при соприкосновении проводящих тел различного химического состава или имеющих неодинаковую температуру.

В более общем случае, когда тело или среда движется со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле, индукции $\vec{B}$ ($\vec{v}$ и $\vec{B}$ измеряются в одной и той же системе координат, а скорость $\vec{v}$ значительно меньше скорости света) и когда в данной точке поля имеется $\vec{E}_{\text{стор}}$, результирующая напряженность поля будет состоять из четырех компонент: $\vec{E} =$

$= -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E}_{\text{стор}} + [\vec{v}\vec{B}]$. Первые два слагаемых имеют тот же смысл, что и в (25.10), третье — сторонняя напряженность поля, четвертое — магнитная составляющая силы Лоренца, представляющая собой силу, действующую на единичный заряд,двигающийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле индукции $\vec{B}$. Все четыре компоненты $\vec{E}$ в одной и той же точке поля одновременно, как правило, не возникают.

В уравнении (25.8) участвует производная $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Найдем ее из (25.10):

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

и подставим в (25.8):

$$\text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{\delta} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad } \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_a \vec{\delta}. \quad (25.11)$$

Вектор-потенциал представляет собой функцию, ротор которой равен $\vec{B}$. В гл. 21 отмечалось, что вектор-потенциал $\vec{A}$ должен быть подчинен определенному условию, а именно: в постоянном магнитном поле $\text{div } \vec{A} = 0$, т. е. линии вектора представляют собой замкнутые сами на себя линии.

* Первую из них можно назвать *вихревой составляющей*, вторую — *потенциальной* (или кулоновой).

В переменном электромагнитном поле таким требованием к вектору-потенциалу является требование (калибровка Лоренца):

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (25.12)$$

Нетрудно убедиться в том, что для неизменного во времени поля условие (25.12) сводится к условию $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. В дальнейшем будет показано, что это условие является уравнением непрерывности $\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (§ 22.3), записанным в иной форме.

Вместе с тем уравнение (25.12) свидетельствует о том, что в переменном электромагнитном поле между векторным потенциалом $\vec{A}$ и скалярным потенциалом φ существует определенная связь и что функции $\vec{A}$ и φ зависят друг от друга.

С учетом (25.12) уравнение (25.11) приобретает вид:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{\delta} \quad (25.13)$$

и называется *уравнением Даламбера*.

Если $\vec{A}$ не является функцией t , то $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$ и уравнение (25.13) переходит в уравнение Пуассона.

Уравнение (25.13) является неоднородным векторным волновым уравнением. Его часто записывают в иной форме:

$$\square^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}. \quad (25.13')$$

Оператор $\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ называют *четырёхмерным лапласианом* (за четвертое измерение принимают время t).

Выясним, какому уравнению в переменном электромагнитном поле подчиняется потенциал φ . С этой целью в уравнение (25.4) вместо напряженности $\vec{E}$ подставим ее эквивалент по (25.10):

$$\operatorname{div} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right) = \frac{\rho}{\epsilon_a} \quad \text{или} \quad -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

$$\text{Но } \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \text{ и, следовательно, } -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

В свою очередь $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi$. Поэтому уравнение (25.4) приобретает следующий вид:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (25.14)$$

Таким образом, в переменном электромагнитном поле скалярный потенциал φ удовлетворяет неоднородному волновому уравнению (25.14). Если поле статическое и потенциал не является функцией времени, то $(\partial^2 \varphi) / (\partial t^2) = 0$ и уравнение (25.14) переходит в уравнение Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$, обсуждавшееся в § 19.19.

Для того чтобы убедиться в том, что уравнение (25.12) совпадает с уравнением непрерывности (22.3), сделаем следующие выкладки.

Применим оператор $\square^2$ к обеим частям уравнения (25.12):

$$\square^2 \operatorname{div} \vec{A} = -\square^2 \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Внесем оператор $\square^2$ под знак дивергенции и под знак производной по времени. Получим

$$\operatorname{div} \square^2 \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \square^2 \varphi. \quad (25.15)$$

В соответствии с (25.14') в (25.15) вместо $\square^2 \vec{A}$ подставим $-\mu_a \vec{\delta}$, а вместо $\square^2 \varphi$ подставим $-\frac{\rho}{\epsilon_a}$. Будем иметь

$$-\operatorname{div} \mu_a \vec{\delta} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (25.15')$$

Вынесем μ_a из-под знака дивергенции, а ϵ_a — из-под знака производной по времени, поменяем знаки и разделим обе части равенства на μ_a :

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{1}{v^2 \epsilon_a \mu_a} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (25.16)$$

Так как $\frac{1}{v^2 \epsilon_a \mu_a} = 1$, то уравнение (25.16) есть уравнение непрерывности $\operatorname{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Обсудим вопрос о решении уравнения (25.14). Запишем решение уравнения для двух частных случаев: для случая, когда $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$, но $\frac{\rho}{\epsilon_a} \neq 0$, и когда $\frac{\rho}{\epsilon_a} = 0$, но $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \neq 0$. После этого на основании физических соображений запишем решение уравнения (25.14) в общем виде, так что оно будет переходить в известные решения для частных случаев.

Если $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$, то уравнение (25.14) переходит в уравнение Пуассона, общее решение которого известно из раздела электростатики (см. § 19.19):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{\rho dV}{R}.$$

Составляющая потенциала φ от элементарного заряда ρdV равна $\frac{1}{4\pi\epsilon_a} \frac{\rho dV}{R}$.

При $\rho = 0$ уравнение (25.14) приобретает вид волнового уравнения:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (25.17)$$

В частном случае для плоской волны φ зависит только от пространственной координаты z :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (25.17')$$

Решением (25.17) является выражение:

$$\varphi = f_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{v}\right).$$

Причем функции f_1 и f_2 могут быть любыми, лишь бы они позволяли дважды дифференцировать их по t и z . Вид функций определяется граничными условиями.

Напомним, что о волновом уравнении (25.17') уже говорилось при рассмотрении вопроса о переходных процессах в линиях с распределенными параметрами в гл. XII.

Функция $f_1\left(t - \frac{z}{v}\right)$ представляет собой падающую волну, распространяющуюся в направлении оси $+z$, функция $f_2\left(t + \frac{z}{v}\right)$ это отраженная волна,двигающаяся в направлении оси $-z$.

Чтобы определить, в каком направлении перемещается волна $f_1\left(t - \frac{z}{v}\right)$, надо выяснить, как должно изменяться z с увеличением времени t , чтобы аргумент функции $f_1\left(t - \frac{z}{v}\right)$ оставался постоянным, например равным нулю. Если принять $t - \frac{z}{v} = 0$, то $z = vt$, т. е. с ростом t увеличивается z . Это означает, что волна распространяется вдоль положительного направления оси z .

Покажем, что в сферической системе координат уравнению (25.17) удовлетворяет функция $\frac{f\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R}$, где R — координата сферической системы; v — скорость распространения волны. Действительно, в сферической системе координат

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.$$

Так как в силу сферической симметрии φ является функцией только R , то $(\partial \varphi)/(\partial \theta)$ и $(\partial \varphi)/(\partial \alpha) = 0$. Поэтому

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right). \quad (25.17'')$$

Если в (25.17'') подставить $\frac{f\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R}$, то окажется, что $\nabla^2 \varphi = \frac{1}{Rv^2} f''\left(t - \frac{R}{v}\right)$; $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ также равно $\frac{1}{Rv^2} f''\left(t - \frac{R}{v}\right)$.

Таким образом, функция $\frac{f\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R}$ удовлетворяет уравнению (25.17) в сферической системе координат.

Для неизменного во времени поля (см. § 19. 19) $\varphi = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_a R}$ и в то же время решение для φ в пространстве, не занятом зарядами,

$$\varphi = \frac{f\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R}.$$

Сопоставляя эти два выражения, находим

$$f\left(t - \frac{R}{v}\right) = \frac{\rho\left(t - \frac{R}{v}\right) dV}{4\pi\epsilon_a}.$$

Таким образом, составляющая потенциала от заряда $\rho(t) dV$, изменяющегося во времени, на расстоянии R от него равна

$$\frac{\rho\left(t - \frac{R}{v}\right) dV}{4\pi\epsilon_a R}. \quad (25.18)$$

Выражение $\rho\left(t - \frac{R}{v}\right)$ следует понимать так: объемный заряд ρ является функцией аргумента $\left(t - \frac{R}{v}\right)$. Результирующее значение потенциала получим, если просуммируем составляющие потенциала от зарядов, распределенных в объеме V :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho\left(t - \frac{R}{v}\right) dV}{R}. \quad (25.19)$$

Обсудим решение уравнения (25.13). В общем случае это уравнение можно разбить на три уравнения для трех проекций вектора-потенциала*. Каждое из уравнений в проекциях будет составлено относительно скалярной величины (проекция вектора есть величина скалярная). Общее решение для каждой из проекций проводится точно так же, как проводилось решение для скалярной величины φ , но вместо объемного заряда будет участвовать соответствующая проекция плотности тока и μ_a вместо $1/\epsilon_a$.

После умножения решений на соответствующие орты и сложения окажется, что составляющая вектора потенциала от элемента тока $\vec{\delta} dV$ в некоторой точке пространства, удаленной от элемента тока на расстояние R ,

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a \vec{\delta}\left(t - \frac{R}{v}\right) dV}{4\pi R}. \quad (25.20)$$

Для получения результирующего значения $\vec{A}$ необходимо геометрически просуммировать составляющие от всех элементов тока:

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta}\left(t - \frac{R}{v}\right) dV}{R}. \quad (25.21)$$

* Подобно тому, как это сделано на стр. 93.

§ 25.2. Запаздывающие потенциалы переменного электромагнитного поля. Рассмотрим, в чем состоит физический смысл выражений (25.18) и (25.20). Электромагнитная волна распространяется со скоростью v . Расстояние R она пройдет за время R/v . Поэтому значение составляющей потенциала ϕ в переменном электромагнитном поле в некоторой точке, удаленной от заряда на расстояние R в момент времени t , определяется значением заряда в момент времени $\left(t - \frac{R}{v}\right)$.

Так же следует понимать и выражение
$$d\vec{A} = \frac{\mu_a \delta \left(t - \frac{R}{v}\right) dV}{4\pi R}.$$

В силу конечной скорости распространения электромагнитной волны значение вектора-потенциала от элемента тока δV в точке, удаленной от элемента тока на расстояние R , изменяется с запаздыванием во времени на величину R/v . Поэтому потенциалы переменного электромагнитного поля называют *запаздывающими потенциалами*.

Так как скорость распространения электромагнитной волны в диэлектрике очень велика (в воздухе $v \approx 300\,000$ км/с), то запаздывание проявляется заметно только при значительных R . При малых R запаздывание настолько незначительно, что им практически можно пренебречь.

Наиболее часто понятием запаздывающих потенциалов пользуются в радиотехнике при рассмотрении вопросов, связанных с излучением электромагнитной энергии.

§ 25.3. Комплексная форма записи запаздывающего векторного потенциала. В гл. 21 [см. уравнение (21.27)] отмечалось, что составляющая векторного потенциала от элемента линейного тока idl :

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{i d\vec{l}}{R}.$$

В переменном электромагнитном поле с учетом явления запаздывания:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{i \left(t - \frac{R}{v}\right)}{R} d\vec{l}.$$

Ток i может изменяться во времени по любому закону. С практической точки зрения наиболее интересен синусоидальный закон изменения тока во времени, поэтому полагаем:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Ток можно представить в показательной форме $I_m e^{j\omega t}$, где $I_m = I_m e^{j\psi}$ (строго говоря, надо было бы написать еще символ взятия мнимой части, но его часто опускают).

Ток $i \left(t - \frac{R}{v}\right) = I_m \sin \left[\omega \left(t - \frac{R}{v}\right) + \psi \right]$ или в показательной форме $I_m e^{j\omega \left(t - \frac{R}{v}\right)}$. Следовательно, комплексную амплитуду вектор-потен-

циала от элемента тока $\vec{dl} I_m \sin(\omega t + \psi)$ можно записать так:

$$\vec{dA} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{I_m e^{j\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)} \vec{dl}}{R}. \quad (25.22)$$

Аналогично, если электрические заряды, создающие поле, меняются во времени по синусоидальному закону, то комплексная амплитуда потенциала $\dot{\phi}$ от объемного заряда $\dot{\rho}_m e^{j\omega t} dV$:

$$\dot{\phi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \frac{\dot{\rho}_m e^{j\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)} dV}{R}. \quad (25.23)$$

Пример 224. Найти закон изменения векторного потенциала от тока $100 \sin(10^5 t + 30^\circ)$ А, протекающего по элементу проводника длиной $dl = 30$ см, в точке, удаленной от элемента тока на расстояние $R = 100$ км, $\mu_a = \mu_0$.

Решение.

$$\begin{aligned} dA &= \frac{\mu_0 I_m \sin\left[\omega\left(t - \frac{R}{v}\right) + \psi\right] dl}{4\pi R} = \\ &= \frac{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 0,3 \cdot 100 \sin\left[10^5\left(t - \frac{100}{300\,000}\right) + 30^\circ\right]}{4\pi \cdot 100 \cdot 10^3} = \\ &= 3 \cdot 10^{-11} \sin(10^5 t - 80^\circ) \text{ В} \cdot \text{с/м} \\ (33,3 \text{ рад} \approx 110^\circ; -110^\circ + 30^\circ = -80^\circ). \end{aligned}$$

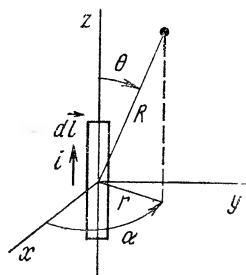


Рис. 25.1

§ 25.4. Излучение электромагнитной энергии.

Рассмотрим вопрос об излучении электромагнитной энергии элементом тока. Пусть по отрезку проводника длиной dl , находящемуся в воздухе ($\epsilon_a = \epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$), протекает ток $I_m \sin(\omega t + \psi)$ (рис. 25.1). Далее будем пользоваться цилиндрической и отчасти сферической системами координат. Ось z цилиндрической системы направим вдоль проводника. Пусть положительное направление тока по проводнику совпадает с положительным направлением оси z .

Найдем значение вектора-потенциала в произвольной точке, удаленной от элемента тока на расстояние R . В соответствии с (25.22)

$$\vec{dA} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_m e^{j\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)} \vec{dl}}{R},$$

или, если исключить множитель $e^{j\omega t}$:

$$\vec{dA} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_m e^{-j\frac{R}{v}\omega} \vec{dl}}{R}.$$

Направление $\vec{d\dot{A}}$ * совпадает с направлением вектора $\vec{dl}$ (вдоль оси z). Найдем магнитную индукцию в произвольной точке поля:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Раскроем ротор в цилиндрической системе координат:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \vec{r}^0 \left(\frac{\partial \dot{A}_z}{r \partial \alpha} - \frac{\partial \dot{A}_\alpha}{\partial z} \right) + \vec{\alpha}^0 \left(\frac{\partial \dot{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right) + \vec{z}^0 \left(\frac{\partial (r \dot{A}_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial \dot{A}_r}{r \partial \alpha} \right).$$

Так как $\vec{A}$ имеет единственную составляющую $\dot{A}_z$, и она зависит только от R и в силу симметрии поля не зависит от α , то

$$\vec{B} = \vec{\alpha}^0 \left(- \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} \right). \quad (25.24)$$

Из формулы (25.24) следует, что магнитная индукция имеет α -е направление.

Для нахождения комплекса магнитной индукции надо вычислить $-\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r}$; $\dot{A}_z$ зависит в явном виде от R , а не от r . Поэтому

$$-\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial r} = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r}. \quad (25.25)$$

Для любой точки пространства справедливо, очевидно, соотношение, вытекающее из теоремы Пифагора,

$$z^2 + r^2 = R^2. \quad (25.26)$$

Продифференцируем (25.26) по r , получим

$$2r = 2R \frac{\partial R}{\partial r}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r}{R} = \sin \theta. \quad (25.27)$$

Составляющая $\dot{A}_z$ состоит из произведения двух функций R : функции $e^{-j\omega \frac{R}{v}}$ и функции $1/R$. Поэтому

$$\dot{B} = -\frac{\partial \dot{A}_z}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{\mu_0 \dot{I}_m dl}{4\pi} \sin \theta \left[-\frac{1}{R^2} e^{-j\omega \frac{R}{v}} - j \frac{\omega}{vR} e^{-j\omega \frac{R}{v}} \right],$$

или

$$\dot{B} = \frac{\mu_0 \dot{I}_m dl \sin \theta}{4\pi} \left[e^{-j\omega \frac{R}{v}} \frac{1}{R^2} + \frac{j\omega}{vR} e^{-j\omega \frac{R}{v}} \right]. \quad (25.28)$$

* В дальнейшем для сокращения записи вместо $\vec{d\dot{A}}$ будем писать $\vec{A}$.

Выражение (25.28) можно переписать и в ином виде, перейдя к мгновенным значениям:

$$B = \frac{\mu_0 I_m dl \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{\sin \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi \right)}{R^2} + \frac{\omega}{vR} \cos \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi \right) \right]. \quad (25.28')$$

Формула (25.28') позволяет сделать вывод, что в любой точке пространства магнитная индукция от элемента переменного тока имеет две составляющие, одна из них убывает обратно пропорционально квадрату радиуса и изменяется по закону синуса во времени, другая убывает обратно пропорционально первой степени радиуса и изменяется по закону косинуса во времени.

Найдем закон изменения напряженности электрического поля. В соответствии с первым уравнением Максвелла:

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}. \quad (25.29)$$

Так как $\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{B}}/\mu_0$, то

$$\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{\alpha}} \left[\frac{I_m dl \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{R^2} + \frac{j\omega e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{vR} \right) \right]. \quad (25.30)$$

Далее целесообразно перейти к сферической системе координат. Проекция $\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}$ в сферической системе следующие:

$$\operatorname{rot}_R \dot{\vec{H}} = \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{H}_\alpha) - \frac{\partial \dot{H}_\theta}{\partial \alpha} \right];$$

$$\operatorname{rot}_\theta \dot{\vec{H}} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \dot{H}_R}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{H}_\alpha);$$

$$\operatorname{rot}_\alpha \dot{\vec{H}} = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R \dot{H}_\theta) - \frac{\partial \dot{H}_R}{\partial \theta} \right].$$

Так как $\dot{H}_\theta = 0$, $\dot{H}_R = 0$, то

$$\operatorname{rot}_R \dot{\vec{H}} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \dot{H}_\alpha); \quad (25.31)$$

$$\operatorname{rot}_\theta \dot{\vec{H}} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \dot{H}_\alpha). \quad (25.32)$$

Найдем проекции $\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}$ на направление R :

$$\operatorname{rot}_R \dot{\vec{H}} = \frac{I_m dl \cos \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2\pi R^3} + \frac{I_m dl \cos \theta j\omega e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2\pi R^2 v}. \quad (25.33)$$

В свою очередь проекция $\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}$ на направление θ по формуле (25.32)

$$\operatorname{rot}_\theta \dot{\vec{H}} = \frac{I_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R^3} + \frac{I_m dl \sin \theta j\omega e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R^2 v} - \frac{I_m dl \sin \theta \omega^2 e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R v^2}. \quad (25.34)$$

Для того чтобы получить проекции $\dot{\vec{E}}$ на направление R и θ , необходимо соответствующие проекции $\text{rot } \dot{\vec{H}}$ разделить на $j\omega\epsilon_0$ [см. уравнение (25.29)]:

$$\dot{E}_\theta = \frac{-jI_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R^3 \omega \epsilon_0} + \frac{I_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi \epsilon_0 R^2 v} + \frac{jI_m dl \sin \theta \omega e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R v^2 \epsilon_0} \quad (25.35)$$

и

$$\dot{E}_R = \frac{-jI_m dl \cos \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2\pi R^3 \omega \epsilon_0} + \frac{I_m dl \cos \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2\pi R^2 v \epsilon_0}. \quad (25.36)$$

Таким образом, напряженность электрического поля имеет две составляющие: одна направлена по θ , другая — по R ; $\dot{E}_\theta$ содержит три слагаемых [см. уравнение (25.35)], изменяющихся обратно пропорционально соответственно, третьей, второй и первой степеням расстояния R ; $\dot{E}_R$ состоит из двух слагаемых, изменяющихся обратно пропорционально R^3 и R^2 . Частное $\frac{v}{\omega} = \frac{v}{2\pi f} = \frac{vT}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi}$. Отношение модуля первого слагаемого в (25.33) к модулю второго равно $\frac{\lambda}{2\pi R}$ (λ — длина волны).

Если $R \gg \frac{\lambda}{2\pi}$, то первым слагаемым по сравнению со вторым можно пренебречь, если $R \ll \frac{\lambda}{2\pi}$, то, наоборот, можно пренебречь вторым слагаемым. Аналогичные соотношения имеют место между модулями слагаемых в (25.34).

Принято все поле делить на ближнюю, среднюю и дальнюю зоны. Для ближней зоны $R \ll \frac{\lambda}{2\pi}$; для дальней $R \gg \frac{\lambda}{2\pi}$. В средней зоне R соизмеримо с $\frac{\lambda}{2\pi}$. В соответствии с этим

для ближней зоны

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{H}} &= \vec{\alpha}^\circ \frac{I_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R^2}; & \dot{E}_\theta &= \frac{-jI_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{4\pi R^3 \omega \epsilon_0}; \\ \dot{E}_R &= \frac{-jI_m dl \cos \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2\pi R^3 \omega \epsilon_0}; \end{aligned} \right\} \quad (25.37)$$

для дальней зоны:

$$\dot{\vec{H}} = \frac{\vec{\alpha}^\circ jI_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2R\lambda}; \quad \dot{E}_\theta = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} jI_m dl \sin \theta e^{-j\omega \frac{R}{v}}}{2R\lambda}. \quad (25.38)$$

Запишем мгновенные значения H и E для дальней зоны:

$$\left. \begin{aligned} H_{\alpha} &= \frac{I_m dl \sin \theta}{2R\lambda} \cos \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi \right); \\ E_{\theta} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_m dl \sin \theta}{2R\lambda} \cos \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi \right). \end{aligned} \right\} \quad (25.39)$$

Таким образом, в дальней зоне, т. е. в зоне, для которой $R \gg \frac{\lambda}{2\pi}$, напряженность магнитного поля имеет только одну α -ю составляющую, а напряженность электрического поля — только одну θ -ю составляющую [см. уравнение (25.38)]. Если провести сферу радиусом R , то во всех точках этой сферы (назовем ее эквифазной поверхностью) H имеет одну и ту же фазу колебания в какой-то конкретный момент времени (фаза колебания определяется аргументом косинуса). Амплитуда H для точек сферы $R = \text{const}$ различна, она зависит от угла θ ; на «полюсах» при $\theta = 0$ и при $\theta = 180^\circ$ амплитуда колебания для любого момента времени равна нулю, так как $\sin \theta = \sin 180^\circ = 0$, амплитуда колебания максимальна на «экваторе» сферы при $\theta = 90^\circ$. По фазе H и E совпадают [см. уравнение (25.39)]. Модуль E в $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_v$ раз больше модуля H , т. е. $E = HZ_v$.

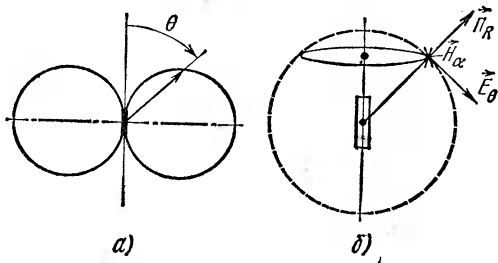


Рис. 25.2

Диаграмму зависимости модуля E или H в дальней зоне от угла θ принято называть *диаграммой направленности*. Она будет представлять собой объемную фигуру — тор, сечение которого плоскостью, проходящей через полярную ось, представляет собой две соприкасающихся окружности (рис. 25.2, а).

Составим выражение вектора Пойнтинга для дальней зоны: $\vec{P} = [\vec{E}_{\theta} \vec{H}_{\alpha}] = \vec{P}_R$.

Векторное произведение двух векторов, один из которых имеет θ -е направление, а другой — α -е, дает вектор $\vec{P}$, направленный по радиусу (рис. 25.2, б).

Так как H и E в дальней зоне совпадают по фазе, то с изменением направления H на противоположное (H изменяется во времени по косинусоиде) одновременно меняется на противоположное и направление вектора E . Но вектор $\vec{P}$ своего направления не меняет, он все время направлен вдоль радиуса.

Найдем величину модуля вектора Пойнтинга. С этой целью умножим модуль E на модуль H :

$$P = \frac{Z_v (dl)^2 I_m^2 \sin^2 \theta \cos^2 \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi \right)}{4R^2 \lambda^2}. \quad (25.40)$$

Среднее значение модуля вектора Пойнтинга за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$P_{\text{ср за период}} = \frac{Z_B (dl)^2 I_m^2 \sin^2 \theta}{8R^2 \lambda^2} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \psi \right) dt = \frac{1}{2} \right].$$

Подсчитаем поток вектора Пойнтинга через сферическую поверхность радиусом R . Элемент $d\vec{S}$ сферической поверхности радиусом R направлен по радиусу. Вектор Пойнтинга $\vec{P}$ также направлен по радиусу. Угол между ними равен нулю (рис. 25.3). Элемент сферической поверхности можно рассматривать как криволинейный квадрат, площадь его (рис. 25.3):

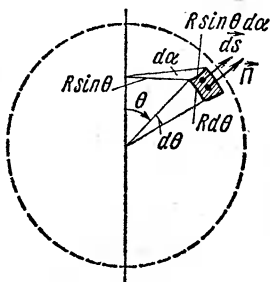


Рис. 25.3

$$dS = R d\theta R \sin \theta d\alpha = R^2 \sin \theta d\theta d\alpha; \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi;$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = - \int_1^{-1} \sin^2 \theta d \cos \theta = \int_1^{-1} (\cos^2 \theta - 1) d \cos \theta = \frac{4}{3}.$$

Заменим I_m^2 на $2I^2$ (I — действующее значение тока). В результате окажется, что поток вектора Пойнтинга через сферическую поверхность радиусом R , представляющий собой мощность P_s , излученную элементом тока, не зависит от радиуса и равен:

$$\oint \vec{P} d\vec{S} = P_s = R_s I^2, \quad (25.41)$$

где

$$R_s = \frac{2}{3} \frac{\pi Z_B (dl)^2}{\lambda^2}. \quad (25.42)$$

Величину R_s называют *сопротивлением излучения*. Чем больше R_s , тем больше излученная мощность при том же токе I . Сопротивление излучения прямо пропорционально квадрату длины излучателя и, что особенно важно, обратно пропорционально квадрату длины волны λ .

Так как длина волны $\lambda = v/f$, то *излученная мощность прямо пропорциональна квадрату частоты*. Если частота мала, например всего 50 Гц, то излучения практически нет. При радиочастоте излучение значительно. Например, при частоте $50 \cdot 10^6$ Гц излучение больше, чем при частоте 50 Гц, в 10^{12} раз.

Пример 225. По отрезку линейного провода длиной $dl = 3$ см протекает переменный ток $I = 0,2$ А. Частота тока $f = 10^9$ Гц. Найти сопротивление и мощность излучения.

Решение. Длина волны $\lambda = 30$ см. По формуле (25.42)

$$R_s = \frac{2}{3} \pi \frac{377 \cdot 3^2}{30^2} = 7,8 \text{ Ом.}$$

По формуле (25.41) $P_s = R_s I^2 = 7,8 \cdot 0,2^2 = 0,312$ Вт.

§ 25.5. Понятие об излучающем диполе. При выводе формул § 25.4 в качестве излучателя электромагнитной энергии был взят небольшой отрезок провода, по которому протекал синусоидальный ток. Но точно такие же формулы были бы получены, если бы вместо элемента тока был взят излучающий диполь. Под *излучающим диполем* понимают отрезок линейного провода с сосредоточенными на концах его емкостями в виде шаров (рис. 25.4, а).

Полагают, что длина диполя l много меньше длины волны λ и сечение провода ничтожно мало. При этих условиях распределенную емкость самого проводника в первом приближении можно не принимать во внимание и учитывать только емкости шаров.

На рис. 25.4, б показана схема, в которой генератор синусоидального напряжения высокой частоты через коаксиальный кабель присоединен к двум вертикально расположенным проводникам (изображены «жирными» линиями), соединенным в свою очередь с двумя шарами (шариками) диполя.

Под воздействием напряжения генератора шарики диполя периодически перезаряжаются. Положим, что заряд верхнего шарика q изменяется по закону $-Q_m \cos \omega t$, а заряд нижнего шарика — по закону $Q_m \cos \omega t$. Тогда по вертикальным проводникам при периодической перезарядке шариков будет протекать ток проводимости:

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega Q_m \sin \omega t.$$

Этот ток замыкается через диэлектрик в виде тока смещения, как показано на рис. 25.4, б.

Важно обратить внимание на то, что по двум вертикальным проводникам длиной $l/2$ каждый при периодической перезарядке шариков протекает ток проводимости i , т. е. два вертикальных проводника длиной $l/2$ (или $\frac{dl}{2}$) с током i , которыми соединены шарики диполя, представляют собой элемент тока $\vec{i}l$ (или $i\vec{dl}$), о котором шла речь в § 25.4.

Посредине элемента тока на рис. 21.4, б есть разрыв, а в элементе тока (рис. 25.1) разрыва нет. Но это не имеет существенного значения, так как разрыв может быть весьма малым по сравнению с длиной l (dl).

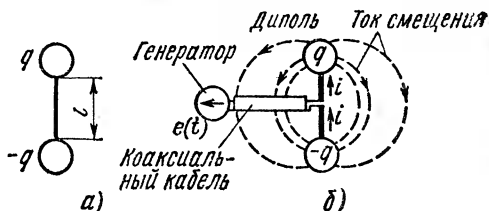


Рис. 25.4

Таким образом, все выводы § 25.4, сделанные по отношению к элементу тока $id\vec{l}$, применимы и к излучателю в виде диполя, т. е. к излучателю, составленному двумя периодически перезаряжающимися шариками, соединенными тонким проводником.

§ 25.6. Дополнительный анализ поля излучения. Как уже говорилось в § 25.4, в ближней зоне излучателя основную роль играют составляющие напряженности электрического поля E_θ и E_R , обратно пропорциональные третьей степени расстояния рассматриваемой точки до излучателя.

Эти составляющие на 90° отстают по фазе от протекающего по проводнику тока или, другими словами, по фазе совпадают с зарядом одного из шаров излучающего диполя.

Из предыдущего [см. формулы (19.74), (19.75)] известно, что напряженность электрического поля, созданного диполем, заряды которого неизменны во времени, также обратно пропорциональна третьей степени расстояния рассматриваемой точки до центра диполя.

Следовательно, для определения мгновенного значения напряженности электрического поля излучающего диполя в ближней зоне практически можно пользоваться формулами, вытекающими из закона Кулона. В свою очередь, напряженность магнитного поля в ближней зоне излучателя [см. формулу (25.37)] обратно пропорциональна квадрату расстояния рассматриваемой точки до элемента тока и по фазе совпадает с током

Из закона Био — Савара — Лапласа [см. формулу (21.36)] следует, что напряженность магнитного поля, создаваемого элементом постоянного тока, также обратно пропорциональна квадрату расстояния рассматриваемой точки до элемента тока.

На основании этого можно сделать вывод, что в ближней зоне (при $R \ll \lambda$) для определения мгновенного значения напряженности магнитного поля практически можно пользоваться формулой Био — Савара — Лапласа. Применимость формул, описывающих статические поля, для подсчета мгновенных значений E и H переменных полей в ближней зоне (при $R \ll \lambda$), объясняется тем, что в ближней зоне можно пренебречь запаздыванием.

Границы ближней зоны зависят от частоты. Так, например, при $f = 50$ Гц $\lambda = 6 \cdot 10^6$ м; при $f = 10^{10}$ Гц $\lambda = 3$ см. Следовательно, при частоте 50 Гц законами Кулона и Био — Савара — Лапласа практически можно пользоваться при любом расстоянии точки до элемента тока или диполя. Совершенно иная картина будет при частоте 10^{10} Гц. В этом случае границы ближней зоны удалены от излучателя всего на доли сантиметра и все пространство вокруг него следует рассматривать как дальнюю зону. В дальней зоне «кулонова» составляющая напряженности электрического поля ничтожно мала по сравнению с волновой составляющей E , а «био — саварова» составляющая напряженности магнитного поля ничтожно мала по сравнению с волновой составляющей H .

В ближней зоне поток вектора Пойнтинга имеет две составляющие: первая изменяется во времени по закону $\sin 2\omega t$ или $\cos 2\omega t$; вторая — по закону $\sin^2 \omega t$ или $\cos^2 \omega t$.

При подсчете потока вектора Пойнтинга через сферическую поверхность радиусом R в ближней зоне за период переменного тока оказывается, что поток от первой составляющей равен нулю, поскольку среднее за период значение функции $\sin 2\omega t$ или $\cos 2\omega t$ равно нулю; поток от второй составляющей отличен от нуля. Физически это означает, что в ближней зоне происходит два качественно различных в энергетическом отношении процесса.

Первый процесс — это процесс периодического обмена энергией между источником энергии, к которому присоединен излучатель, и ближней зоной. Энергия то забирается от источника и накапливается

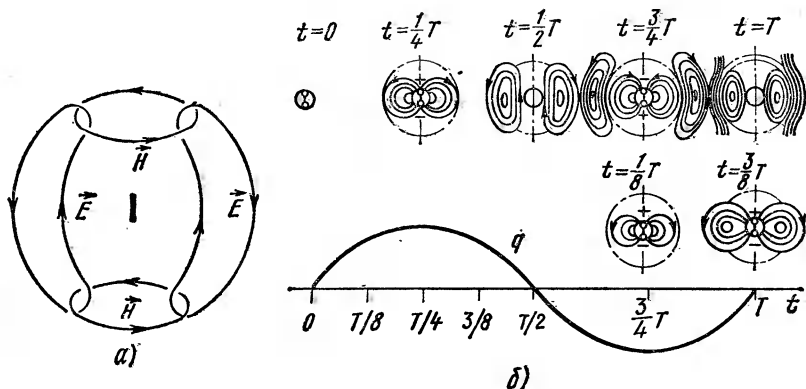


Рис. 25.5

в электромагнитном поле ближней зоной, то отдается обратно источнику. Этот процесс характерен для «кулонова» и «био — саварова» полей ближней зоны.

Второй процесс — это процесс излучения энергии. Он характеризует волновой процесс в ближней зоне. Излученная энергия составляет относительно небольшую величину по сравнению с энергией, периодически накапливаемой в электромагнитном поле ближней зоны и затем отдаваемой источнику питания.

От излучателя в пространство распространяются электромагнитные волны*. Эти волны для фиксированного момента времени схематически можно представить рис. 25.5, а. На нем линии E образуют замкнутые фигуры, лежащие в меридиональных плоскостях. Линии E

* Существование электромагнитных волн экспериментально было доказано Г. Герцем в 1887—1888 гг. Справедливость электромагнитной теории света была подтверждена опытами П. Н. Лебедева в 1895 г., который измерил световое давление, теоретически предсказанное Д. Максвеллом.

А. С. Поповым 7 мая 1895 г. на заседании Русского физико-химического общества был прочитан доклад об успешно проведенных опытах по приему и передаче радиосигналов. Поэтому 7 мая отмечают как День радио.

охвачены линиями H , которые представляют собой окружности с центром на оси элемента тока. Чтобы не загромождать рис. 25.5, a , на нем изображены всего две линии E и две линии H .

Линии напряженности электрического поля в меридиональной плоскости для волновой зоны излучателя при различных моментах времени представлены на рис. 25.5, b , где изображена также кривая изменения заряда излучающего диполя в функции времени. Чем больше по абсолютной величине становятся заряды диполя, тем большее количество линий E начинается или соответственно оканчивается на них.

По мере распространения электромагнитной волны в окружающее пространство форма линий E непрерывно меняется. Когда заряды диполя по абсолютной величине начинают уменьшаться, начинает уменьшаться и число исходящих из них линий E . При этом образуются замкнутые на себя линии E . Пакет замкнутых на себя линий E сцеплен с пронизывающими этот пакет линиями H (см. рис. 25.5, a). В следующий полупериод, когда заряды шаров меняют знаки на противоположные, образуется аналогичный пакет замкнутых на себя линий E , отличающийся от предыдущего лишь направлением вихря E .

§ 25.7. Расчет поля реальных излучателей. Практически в качестве излучателей используют антенны. Простейшая антенна представляет собой отрезок провода длиной l , расположенный вертикально по отношению к поверхности земли (рис. 25.6, a). Генератор высокой частоты включают между антенной и землей. За счет наличия рас-

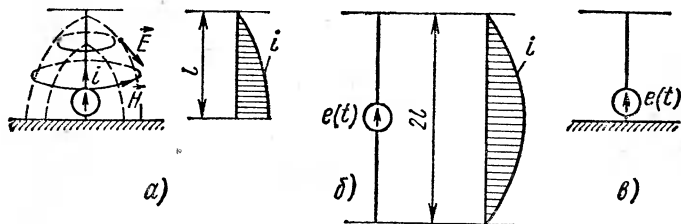


Рис. 25.6

пределенных емкостей антенны и проходящих через них токов смещения, ток по высоте антенны меняется по амплитуде и фазе (см. эпюру изменения амплитуд на рис. 25.6, a). Антенна обладает высокой способностью к излучению вследствие того, что создаваемые ею электрическое и магнитное поля распределены в одной и той же области пространства, окружающего антенну (см. рис. 25.6, a).

Влияние земли на поле учитывают, вводя в расчет зеркальное изображение антенны (полагая, что земля является идеальным проводником). При этом длина антенны оказывается равной $2l$, а эпюра тока дополняется второй половиной (рис. 25.6, b)*. Для расчета поля,

* Мощность, излученная в пространство над землей таким излучателем, равна половине мощности излучателя удвоенной длины с током i .

создаваемого антенной, ее заменяют совокупностью малых отрезков длиной dl , на каждом из которых ток принимают неизменным по амплитуде и фазе. Тогда напряженность поля в произвольной точке пространства можно найти как геометрическую сумму напряженностей, создаваемых всеми малыми отрезками антенны.

Для увеличения емкости антенны, а следовательно, и проходящего по ней тока при том же напряжении генератора антенну часто дополняют горизонтальным участком (рис. 25.6, в).

§ 25.8. Излучение магнитного диполя и принцип двойственности. В § 19.11 и 25.5 шла речь об электрическом диполе, обладающем электрическим моментом $\vec{p}_e = q_s \vec{l}$. В теории поля пользуются также понятием магнитного диполя. Магнитный диполь образован двумя магнитными зарядами q_m и $-q_m$, расположенными на расстоянии l . Диполь обладает магнитным моментом $\vec{p}_m = q_m \vec{l}$ (рис. 25.7, а).

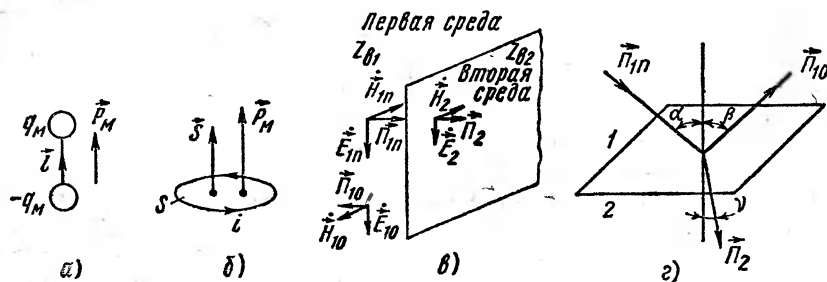


Рис. 25.7

Из § 14.24 известно, что виток (рамка) с током i , охватывающим площадь S , также обладает магнитным моментом $\vec{p}_m = i\vec{S}$ (рис. 25.7, б). Магнитный диполь можно рассматривать как расчетный эквивалент витка с током, если равны их магнитные моменты, т. е. если $q_m \vec{l} = i\vec{S}$. Изменение тока в рамке соответствует изменению магнитных зарядов диполя во времени и протеканию между ними «магнитного тока смещения». Излучение энергии рамкой с током в расчетном смысле можно представить как излучение магнитного диполя.

Если обратиться к уравнениям Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ и $\text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, то нетрудно заметить, что первое уравнение получается из второго, а второе — из первого, если заменить $\vec{H}$ на $\vec{E}$, а ϵ_a на $-\mu_a$. Это свойство уравнений Максвелла называют *принципом двойственности*. Его применяют для решения задач электродинамики, двойственных уже решенным.

Так, имея решение для поля, создаваемого электрическим диполем, получают решение для поля, создаваемого магнитным диполем, т. е. рамкой с синусоидально изменяющимся током (считая, что оси $\vec{R}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\theta}$ расположены в соответствии с рис. 25.1). Так как в случае электрического диполя $i = \frac{dq}{dt}$, то при $i = I_m \sin \omega t$: $\dot{i}_m = j\omega \dot{q}_m$, а $i_m dl = j\omega \dot{q}_m dl = j\omega \dot{p}$.

Подставив в (25.38) $j\omega \dot{p}$ вместо $i_m dl$, запишем формулу для напряженности магнитного поля в дальней зоне через электрический момент диполя $\dot{p}$:

$$\dot{H}_\alpha = - \frac{\omega \dot{p} \sin \theta e^{-j\frac{\omega R}{v}}}{2R\lambda}.$$

В соответствии с принципом двойственности в этой формуле заменим H_α на $\dot{E}_\alpha$ и $\dot{p}$ на $\dot{p}'_m = \mu_a \dot{I}_m S$. Получим формулы для комплекса напряженности электрического поля в дальней зоне магнитного диполя:

$$\dot{E}_\alpha = - \frac{\omega \mu_a \dot{I}_m S \sin \theta e^{-j \frac{\omega R}{v}}}{2R\lambda}$$

и для комплекса напряженности магнитного поля:

$$\dot{H}_\theta = - \frac{\omega \mu_a \dot{I}_m S \sin \theta e^{-j \frac{\omega R}{v}}}{2R\lambda Z_B}.$$

§ 25.9. Переход плоской электромагнитной волны из одной среды в другую. Рассмотрим условия перехода плоской синусоидально изменяющейся электромагнитной волны из первой среды с волновым сопротивлением Z_{B1} во вторую среду с волновым сопротивлением Z_{B2} . Примем, что волна падает перпендикулярно границе раздела сред (рис. 25.7, в). Волна частично пройдет во вторую среду, частично отразится.

В первой среде будут падающая (индекс «п») и отраженная (индекс «о») волны, во второй — только падающая (потому индекс «п» у нее не будем ставить). Падающую во второй среде волну называют также преломленной.

Для удобства чтения рис. 25.7, в векторы, характеризующие падающую и отраженную волны в первой среде, смещены по вертикали и несколько отодвинуты от границы раздела сред. На границе раздела сред должны быть равны тангенциальные составляющие напряженности электрического поля и тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля:

$$\dot{E}_{1п} + \dot{E}_{1о} = \dot{E}_2; \quad (25.43)$$

$$\dot{H}_{1п} + \dot{H}_{1о} = \dot{H}_2. \quad (25.44)$$

Уравнения (25.43) и (25.44) полностью тождественны уравнениям, которыми связаны напряжения и токи падающей, отраженной и преломленной волн при переходе волны с одной линии с распределенными параметрами на другую (см. § 12.6).

Комплекс напряженности электрического поля $\dot{E}_{1п}$ равен комплексу напряженности магнитного поля $\dot{H}_{1п}$, умноженному на Z_{B1} : $\dot{E}_{1п} = \dot{H}_{1п} Z_{B1}$.

Для отраженной волны в соответствии с изменением направления движения энергии на противоположное: $\dot{E}_{1о} = - \dot{H}_{1о} Z_{B1}$.

Для преломленной волны $\dot{E}_2 = \dot{H}_2 Z_{B2}$.

Из уравнений (25.43) и (25.44) с учетом предыдущих строчек получим:

$$\dot{E}_{1о} = \frac{Z_{B2} - Z_{B1}}{Z_{B2} + Z_{B1}} \dot{E}_{1п}; \quad (25.45)$$

$$\dot{H}_2 = \frac{2Z_{B1}}{Z_{B1} + Z_{B2}} \dot{H}_{1п}; \quad (25.46)$$

$$\dot{H}_{1о} = \frac{Z_{B1} - Z_{B2}}{Z_{B1} + Z_{B2}} \dot{H}_{1п}. \quad (25.47)$$

Проанализируем полученные результаты. Значения $\dot{E}_{10}$, $\dot{H}_{10}$ и $\dot{E}_2$, $\dot{H}_2$ зависят от соотношения между волновыми сопротивлениями обеих сред. Наибольший практический интерес представляет случай, когда волна падает из воздуха на поверхность металла. В этом случае первой средой является воздух, а второй — металл. Так как волновое сопротивление проводящей среды зависит не только от ее проводимости и магнитной проницаемости, но и от частоты [см. формулу (23.12)], то для определенности положим, что проводящей средой является медь, а частота $f = 10^8$ Гц. Сопоставим значения волновых сопротивлений для диэлектрика и для металла (см. формулы для Z_n на стр. 150 и 136). Для воздуха $Z_{в1} = 377$ Ом. Для меди ($\gamma = 5,6 \cdot 10^7$ Ом $^{-1} \cdot$ м $^{-1}$) при $f = 10^8$ Гц, $Z_{в2} = 0,00357e^{j45^\circ}$ Ом. Если подставить значения $Z_{в1}$ и $Z_{в2}$ в (25.47), то получим $\dot{E}_{10} \approx -\dot{E}_{1п}$; $\dot{H}_{10} \approx \dot{H}_{1п}$, т. е. от поверхности металла электромагнитная волна почти полностью отражается с переменной знака у напряженности электрического поля. Та часть волны, которая все же проникнет в металл, быстро в нем затухнет. Если бы проводящая среда имела γ , стремящуюся к бесконечности, то тогда она являлась бы идеальным зеркалом для электромагнитной волны.

Явление отражения электромагнитных волн от проводящих сред лежит в основе радиолокации.

В более общем случае электромагнитная волна, распространяясь из среды 1 в среду 2, направлена перпендикулярно границе раздела сред (рис. 25.7, з).

В среде 1:

$$Z_{в1} = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\epsilon_{a1}}}; \quad p_1 = j\omega \sqrt{\epsilon_{a1}\mu_{a1}};$$

в среде 2:

$$Z_{в2} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\epsilon_{a2}}}; \quad p_2 = j\omega \sqrt{\epsilon_{a2}\mu_{a2}}.$$

Векторы Пойнтинга падающей, отраженной и преломленной волн ($\vec{P}_{1п}$, $\vec{P}_{10}$, $\vec{P}_2$) находятся в одной плоскости. Их углы с вертикалью к границе раздела обозначены на рис. 25.7, з соответственно α , β , ν .

Угол падения α равен углу отражения β , а

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \nu} = \frac{V_{\epsilon_2 \mu_2}}{V_{\epsilon_1 \mu_1}}. \quad (a)$$

Используем обозначения § 25.8 и рассмотрим два случая.

1. Когда вектор $\dot{E}_{1п}$ перпендикулярен плоскости падения (т. е. параллелен границе раздела сред), из граничных условий следует:

$$\dot{E}_{10} = \dot{E}_{1п} \frac{Z_{в2} \cos \alpha - Z_{в1} \cos \nu}{Z_{в2} \cos \alpha + Z_{в1} \cos \nu}, \quad \dot{E}_2 = \dot{E}_{1п} \frac{2Z_{в2} \cos \alpha}{Z_{в2} \cos \alpha + Z_{в1} \cos \nu}. \quad (б)$$

2. Когда вектор $\dot{E}_{1п}$ параллелен плоскости падения (а вектор $\dot{H}_{1п}$ перпендикулярен ей):

$$\dot{E}_{10} = \dot{E}_{1п} \frac{Z_{в2} \cos \nu - Z_{в1} \cos \alpha}{Z_{в1} \cos \alpha + Z_{в2} \cos \nu}, \quad \dot{E}_2 = \dot{E}_{1п} \frac{2Z_{в2} \cos \alpha}{Z_{в1} \cos \alpha + Z_{в2} \cos \nu}. \quad (в)$$

Соотношения (б) и (в) называют формулами Френеля. Если окажется, что $\sin \nu = \sin \alpha \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} > 1$ — наступит полное отражение от границы (преломленная волна

отсутствует). Этот режим используется, например, в оптических волноводах. Если $\alpha + \nu = 90^\circ$ — возникает *полное преломление*, когда отраженная волна отсутствует.

В заключение упомянем о явлении дифракции. *Дифракцией* называют явление отражения и преломления электромагнитных волн от проводящего или диэлектрического тела, а также изменение структуры и направления волн при прохождении их через отверстие (щель) в каком-либо теле, например в пластинке, когда размеры тела или щели соизмеримы с длиной электромагнитной волны.

Качественно рассмотрим, как влияет на поле плоской волны помещенный в это поле длинный цилиндр радиуса a , полагая, что ось цилиндра расположена перпендикулярно вектору Пойнтинга падающей волны, а ее вектор $\vec{E}$ параллелен оси цилиндра.

Рассмотрим три характерных случая. 1. Если длина волн $\lambda \ll a$, то действуют законы геометрической оптики и за цилиндром будет область тени — рис. 25.8, а. 2. Если вне и внутри цилиндра $\lambda \gg a$, то можно пренебречь запаздыванием, и тогда поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ внутри и вне цилиндра определяются в условиях, близких к статическим. 3. Если $\lambda/a \approx 1$, а это случай, наиболее типичный для дифракционных задач,

то в области за цилиндром, где на рис. 25.8, а была тень, появляется интенсивное поле. На рис. 25.8, б изображена эпюра для напряженности H рассеянного поля, когда проводимость γ цилиндра стремится к бесконечности. Физически интенсивное поле вместо тени получается за счет того, что наводимые в верхней части проводящего цилиндра токи затекают в нижнюю его часть и там служат излучателем (вторичным источником поля). Наличие мелких углублений на диаграмме объясняется интерференцией волн.

Вопросы для самопроверки

1. Как связан источник вектора $\vec{A}$ с потенциалом φ ?
2. Почему первое слагаемое правой части формулы $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$ называют вихревой, а второе — потенциальной составляющей?
3. Запишите уравнения, которым удовлетворяют $\vec{A}$ и φ в переменном поле.
4. Почему $\vec{A}$ и φ называют запаздывающими потенциалами? Зависит ли запаздывание по фазе (измеряемое в радианах) от частоты?
5. Качественно поясните ход решения задачи об излучении энергии элементом тока (электрическим диполем).
6. От каких факторов зависит излученная мощность электрическим и магнитным диполями?
7. Правильно ли записан критерий дальней зоны: $R \gg \frac{v}{\omega}$?
8. В чем различие физических процессов в ближней и дальней зонах?
9. Дайте определение дифракции. Качественно поясните, почему, когда длина волны λ соизмерима с линейными размерами проводящего тела, то в той области, где должна бы быть тень, может возникнуть интенсивное поле.
10. Почему энергию СВЧ практически невозможно передавать по обыкновенным открытым линиям и коаксиальному кабелю?
11. Решите задачи 22.33; 22.35; 22.36; 22.44.

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ШЕСТАЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

§ 26.1. Понятие о волноводах и объемных резонаторах. Канализация энергии очень высокой частоты по обычным двухпроводным линиям передачи практически невозможна ввиду того, что: 1) провода линии играют роль антенн и, вместо того чтобы передавать энергию потребителю, излучают ее в пространство; 2) активное сопротивление проводов линии при сверхвысоких частотах в силу резко выра-

женного поверхностного эффекта оказывается настолько большим, что весьма значительная часть энергии затрачивается на нагрев проводов.

Применение коаксиального кабеля (коаксиальной линии, рис. 22.4) для канализации энергии весьма высокой частоты экономически также невыгодно. Хотя в этом случае энергия в окружающее пространство и не излучается (так как оболочка кабеля одновременно является и экраном), однако в кабеле велики потери энергии в жиле и в диэлектрических шайбах (обычно из полистирола или полиэтилена), с помощью которых жила крепится внутри кабеля. Практически коаксиальный кабель применяют в диапазоне частот от нуля до нескольких мегагерц. Его используют в силовых, телефонных и телевизионных устройствах.

При частотах больше 10^9 Гц энергию передают по волноводам. Волновод представляет собой полую трубу прямоугольного или круглого сечения.

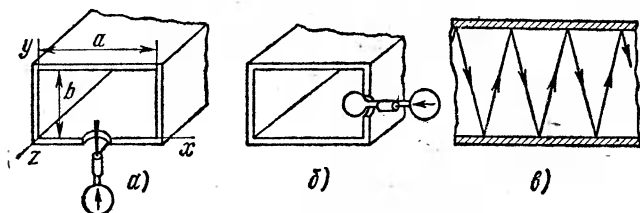


Рис. 26.1

На рис. 26.1, а изображен прямоугольный волновод. Размеры a и b находятся в определенном соотношении с длиной волны. Так, например, при длине волны $\lambda = 10$ см берут $b = 3,4$ см и $a = 7,2$ см.

Энергия внутрь волновода обычно доставляется с помощью небольшого стерженька, помещенного в волноводе, и коаксиального кабеля, соединенного с генератором высокой частоты (см. рис. 26.1, а), или с помощью петли с током, помещаемой в волноводе, и коаксиального кабеля, соединенного с генератором высокой частоты (рис. 26.1, б). Иногда волновод возбуждают, соединяя его через щель или диафрагму с другим волноводом или с резонатором. Отвод энергии с другого конца волновода производят с помощью стерженька или петли, или через щель.

Энергия передается вдоль волновода, отражаясь от его стенок (рис. 26.1, в). Стенки волновода являются как бы направляющими для потока энергии. Небольшая часть энергии проникает в стенки волновода и выделяется в них в виде теплоты. Для уменьшения потерь энергии в стенках волновода внутреннюю поверхность труб полируют и покрывают слоем хорошо проводящего металла, например серебра.

В качестве резонансных контуров при не очень высоких частотах применяют контуры с сосредоточенными индуктивностями и емкостями или отрезки линий с распределенными параметрами. При сверхвысо-

ких частотах (при длине волн сантиметрового диапазона) контуры с сосредоточенными параметрами L и C и отрезки линий с распределенными параметрами оказываются малоприспособными, так как они излучают электромагнитную энергию и вследствие этого, а также в силу резко выраженного поверхностного эффекта обладают малой добротностью.

При сверхвысоких частотах в качестве устройства, выполняющего функции резонансного контура с высокой добротностью, применяют объемный резонатор.

Объемный резонатор обычно представляет собой полый прямоугольный параллелепипед, стенки которого выполняют из хорошо проводящего материала. Длины его трех ребер находятся, как и у волновода, в определенном соотношении с длиной волны и составляют несколько сантиметров. Возбуждают его так же, как и волновод,

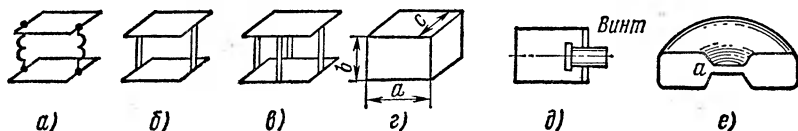


Рис. 26.2

например, с помощью стерженька или петли с током. В полости объемного резонатора возникают стоячие электромагнитные волны по осям x , y , z , так как со всех сторон полость ограничена хорошо проводящими стенками.

Качественно переход от обычного колебательного контура L , C к прямоугольному объемному резонатору иллюстрируют рис. 26.2, a —26.2, $г$. На рис. 26.2, a изображены две пластины конденсатора, соединенные двумя индуктивностями, на рис. 26.2, $б$ индуктивности заменены на две полоски, на рис. 26.2, $в$ — на четыре полоски; на рис. 26.2, $г$ полоски заменены проводящими стенками.

Если через a , b , c обозначить длины трех ребер резонатора в направлении осей x , y , z (рис. 26.2, $г$), а через m , n , p — характеристические числа, которые могут принимать значения 0, 1, 2 и т. д., то собственная частота объемного резонатора:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}.$$

Так, при $m = n = 1$, $p = 0$, $a = b = c = 5$ см, $\omega = 2,66 \cdot 10^{10}$ рад/с, $f = 4,23 \cdot 10^9$ Гц.

Частота колебаний возбудителя, т. е. частота тока в стерженьке или петле, должна равняться собственной частоте резонатора. Для настройки резонатора изменяют один из его размеров, например с помощью поршня (винта) — рис. 26.2, $д$.

При колебательном процессе в резонаторе энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля и обратно. В прямоугольном и цилиндрическом резонаторах энергия каждого из полей распре-

делена по всей полости резонатора. В других устройствах сверхвысоких частот (клистронах, магнетронах) энергии этих полей распределены преимущественно в различных областях. Так, в резонансной полости клистрона (рис. 26.2, е) электрическое поле сосредоточено преимущественно в узком зазоре a (как бы в плоском конденсаторе), а магнитное связано с индуктивностью, роль которой выполняет полость резонатора, примыкающая к узкому зазору.

Под добротностью резонатора понимают величину $Q = \frac{\omega_0 W_0}{P}$.

Здесь W_0 — энергия электромагнитного поля, запасенная в резонаторе, P — активная мощность, затрачиваемая на потери от вихревых токов в стенках резонатора, на потери через щель в виде излучения, а если диэлектрик, имеющийся в полости резонатора, не идеальный, то и на потери в диэлектрике. Добротность Q достигает величины 10^4 и более.

§ 26.2. Типы волн в волноводе. Решение для Н-волны. Процесс распространения электромагнитных волн в полости прямоугольного волновода будем рассматривать, полагая, что его стенки выполнены из сверхпроводящего материала ($\gamma \rightarrow \infty$). При этом условии напряженность электрического поля на стенках волновода будет равна нулю (плотность тока на стенках волновода $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$ есть величина конечная, поэтому при $\gamma \rightarrow \infty E \rightarrow 0$).

Полость волновода заполнена диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого ϵ_a , а магнитная проницаемость μ_a . Оси координат расположим в соответствии с рис. 26.3, а. Размеры полости волновода в направлении оси x обозначим буквой a , а в направлении оси y — буквой b . Длина волновода в направлении оси z неограничена. Электромагнитное поле в волноводе описывается уравнением (24.3'):

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \vec{H} = 0$$

или аналогичным ему уравнением

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \vec{E} = 0.$$

Распространяющиеся в волноводе электромагнитные волны являются волнами, бегущими вдоль оси волновода (оси z) и стоячими в двух остальных направлениях. Стоячие волны в направлениях x и y образуются вследствие многократных отражений волн от стенок волновода.

Тот факт, что волны являются бегущими вдоль оси z , в формально математическом отношении находят свое выражение в том, что каждая из составляющих волн, подобно бегущим волнам в линии с распределенными параметрами, при записи ее имеет множитель $e^{ik_p z}$, где k_p — коэффициент распространения.

Волны, распространяющиеся в волноводах, разделяют на два типа: H -волны и E -волны.

H -волну называют также поперечно-электрической и обозначают ТЕ; E -волну — поперечно-магнитной и обозначают ТМ. Кроме волн ТЕ и ТМ могут быть еще волны ТЕМ. Они возникают в коаксиальном кабеле (не в волноводе). В волне

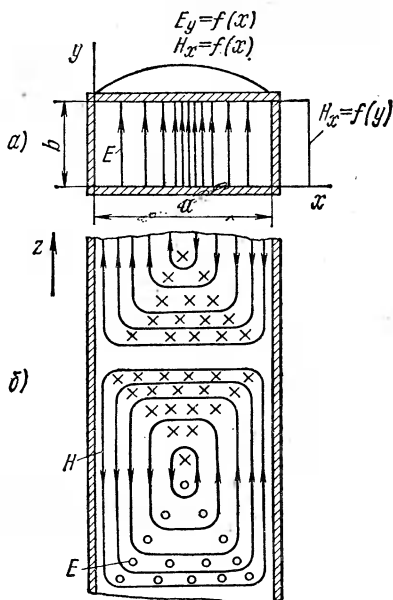


Рис. 26.3

ТЕМ векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ лежат в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Структура H -волны такова, что составляющую вдоль оси волновода имеет только напряженность магнитного поля, а напряженность электрического поля расположена в плоскостях, перпендикулярных оси волновода, т. е. для H -волны:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{i}H_x + \vec{j}H_y + \vec{k}H_z; \\ \vec{E} &= \vec{i}\dot{E}_x + \vec{j}\dot{E}_y.\end{aligned}\quad (26.1)$$

Для E -волны имеет место обратная картина: составляющую вдоль оси волновода имеет только напряженность электрического поля, а векторы напряженности магнитного поля расположены в плоскостях, перпендикулярных оси волновода, т. е. для E -волны:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{i}\dot{E}_x + \vec{j}\dot{E}_y + \vec{k}\dot{E}_z; \\ \vec{H} &= \vec{i}H_x + \vec{j}H_y.\end{aligned}$$

Какой из этих типов волн возникает, зависит от условий возбуждения волновода. Если возбуждение производить с помощью штырька по рис. 26.1, а, то в волноводе возникнут E -волны. При возбуждении с помощью петли с током, расположенной вблизи узкой стенки волновода в соответствии с рис. 26.1, б, в последнем возникают H -волны.

Приводимые далее выкладки проделаны для H -волны, но они были бы почти такие же и для E -волны. Если подставить (26.1) в уравнение (24.3'), то последнее разобьется на три уравнения для проекций. Для проекции на ось z будем иметь уравнение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)H_z + \omega^2 \epsilon_a \mu_a H_z = 0. \quad (26.2)$$

Вспользуемся методом разделения переменных, который рассмотрен в § 19.39. С этой целью положим:

$$H_z = XY e^{-k_p z}, \quad (26.3)$$

где X — функция только x ; Y — функция только y . Множитель $e^{-k_p z}$ свидетельствует о том, что вдоль оси z движется бегущая волна.

Подставим (26.3) в (26.2):

$$Y e^{-k_p z} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X e^{-k_p z} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_p^2 XY e^{-k_p z} + \omega^2 \epsilon_a \mu_a XY e^{-k_p z} = 0. \quad (26.2')$$

Обозначим:

$$k_p^2 + \omega^2 \epsilon_a \mu_a = k^2 \quad (26.4)$$

и разделим (26.2') на $XY e^{-k_p z}$. Будем иметь

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 = 0. \quad (26.5)$$

Сумма двух функций: $\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ и $\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$, из которых одна является функцией только x , а другая — функцией только y , может равняться постоянному числу $-k^2$ только в том случае, если каждая из этих функций есть постоянное число.

Перейдем от частных производных к обыкновенным и положим:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -p^2; \quad (26.5a)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -q^2, \quad (26.5b)$$

где p и q — некоторые постоянные числа.

Решением уравнений (26.5а) и (26.5б) являются функции $X = C_1 \sin(px + \varphi)$; $Y = C_2 \sin(qy + \psi)$, где C_1 , φ и C_2 , ψ — постоянные интегрирования, которые найдем из граничных условий. Таким образом, в соответствии с (26.3)

$$H_z = H_m \sin(px + \varphi) \sin(qy + \psi) e^{-k_p z}. \quad (26.6)$$

Здесь комплексная амплитуда $H_m = C_1 C_2$.

Для определения значений p , q , φ , ψ обратимся к первому и второму уравнению Максвелла, записанным через проекции напряженностей на оси координат:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_x; \quad (26.7)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_y; \quad (26.8)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_z; \quad (26.9)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j\omega\mu_a H_x; \quad (26.10)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j\omega\mu_a H_y; \quad (26.11)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu_a H_z. \quad (26.12)$$

В силу того что для H -волны $\dot{E}_z = 0$ и поскольку волны являются бегущими вдоль оси z , то $\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -k_p \dot{E}_y$, а $\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -k_p \dot{E}_x$.

Из уравнений (26.10) и (26.11) следует, что

$$\left. \begin{aligned} k_p \dot{E}_y &= -j\omega\mu_a H_x; \\ k_p \dot{E}_x &= j\omega\mu_a H_y. \end{aligned} \right\} \quad (26.13)$$

Как уже говорилось, на внутренних поверхностях стенок волновода напряженность электрического поля равна нулю. Следовательно, $E_x = 0$ при $y = 0$ и $y = b$, а $E_y = 0$ при $x = 0$ и $x = a$. Если это учесть, то из уравнений (26.13) имеем: $H_{y=0} = H_{y=b} = 0$ и $H_{x=0} = H_{x=a} = 0$.

Так как $\frac{\partial H_y}{\partial z} = -k_p \dot{H}_y$, $\frac{\partial H_x}{\partial z} = -k_p \dot{H}_x$, а $\dot{H}_y = 0$ при $y = 0$ и $y = b$ и $H_x = 0$ при $x = 0$ и $x = a$, то из (26.7) и (26.8) найдем

$$\left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)_{y=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} \right)_{y=b} = 0; \quad (26.14)$$

$$\left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right)_{x=a} = 0. \quad (26.15)$$

Уравнения (26.14), (26.15) служат для определения значений p , q , φ , ψ .

Подставив (26.6) в (26.14), найдем $\psi = \pi/2$ и $q = \frac{n\pi}{b}$. Из (26.15) определим

$\varphi = \pi/2$ и $p = \frac{m\pi}{a}$, где m и n — целые числа; m равно числу полуволн электромагнитной волны, которое разместится по ширине волновода; n показывает, сколько полуволн разместится по высоте волновода. Таким образом,

$$\dot{H}_z = \dot{H}_m \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}. \quad (26.16)$$

Найдем теперь $\dot{H}_x$, $\dot{H}_y$ и $\dot{E}_x$, $\dot{E}_y$. Для определения $\dot{E}_x$ в уравнении (26.7) $\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}$ заменим на $-k_p \dot{H}_y = -k_p \frac{k_p \dot{E}_x}{j\omega\mu_a}$. Тогда $\frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{k_p^2 \dot{E}_x}{j\omega\mu_a} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_x$. Отсюда

$$\dot{E}_x = -\frac{j\omega\mu_a}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{j\omega\mu_a}{k^2} \frac{n\pi}{b} \dot{H}_m \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}, \quad (26.17)$$

где $k^2 = k_p^2 + \omega^2\epsilon_a\mu_a$. Аналогично,

$$\dot{H}_y = \frac{k_p \dot{E}_x}{j\omega\mu_a} = \frac{k_p}{k^2} \frac{n\pi}{b} \dot{H}_m \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}; \quad (26.18)$$

$$\dot{E}_y = \frac{j\omega\mu_a}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -j \frac{\omega\mu_a}{k^2} \frac{m\pi}{a} \dot{H}_m \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z} \quad (26.19)$$

$$\dot{H}_x = -\frac{k_p}{j\omega\mu_a} \dot{E}_y = \frac{k_p}{k^2} \frac{m\pi}{a} \dot{H}_m \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-k_p z}. \quad (26.20)$$

Проанализируем полученные результаты. Коэффициент k_p играет роль постоянной распространения электромагнитной волны вдоль оси z . Если k_p будет действительным числом, то волна при своем продвижении по волноводу будет затухать. Затухание будет отсутствовать, если k_p — мнимое число.

Для того чтобы связать k_p с геометрическими размерами волновода a и b и числами m и n , подставим (26.16) в (26.2). Получим $k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$.

Но $k^2 = k_p^2 + \omega^2\epsilon_a\mu_a$. Поэтому $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k_p^2 + \omega^2\epsilon_a\mu_a$, $k_p = 0$

при
$$\omega = \omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_a\mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (26.21)$$

Величина k_p является мнимым числом при $\omega > \omega_0$. Таким образом по волноводу с заданными размерами могут распространяться электромагнитные волны, если частота волны $\omega > \omega_0$ (а длина волны $\lambda < \lambda_c$, где $\lambda_c = v_c/f$ — длина волны в свободном пространстве; v_c — скорость света).

Числа m и n могут принимать любые целые значения, но не могут одновременно равняться нулю, так как тогда все составляющие E и H отсутствовали бы. Наибольшее практическое значение имеет основная волна, для которой $m=1$ и $n=0$. Для нее по ширине волновода укладывается одна полуволна, а по его высоте интенсивность поля не изменяется. При $a = 7,2$ см по формуле (26.21) найдем $\omega_0 \approx 13,1 \cdot 10^9$ рад/с.

Таким образом, по волноводу может передаваться энергия лишь весьма высокой частоты. Амплитуда максимальной напряженности поля E должна быть меньше пробивной напряженности поля, иначе произойдет пробой диэлектрика (воздуха). При любом способе возбуждения волновода вблизи возбуждателя возникает несколько

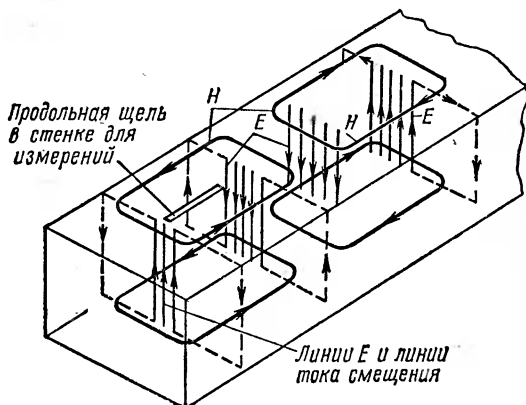


Рис. 26.4

При любом способе возбуждения волновода вблизи возбуждателя возникает несколько

различных типов волн. Чтобы на некотором расстоянии от излучателя избавиться от высших типов волн, размеры a и b подбирают исходя из того, чтобы для низшего типа волн, например H_{10} , при выбранной ω значение k_p являлось мнимым числом, а для ближайшего высшего типа волн, например H_{11} , k_p было действительным числом. Обычно берут $a = (0,7 \div 0,8) \lambda_c$ и $b = (0,3 \div 0,4) \lambda_c$. Размеры a и b стандартизованы.

Объемная картина поля для волны H_{10} в некоторый момент времени изображена на рис. 26.4. Токи смещения в полости волновода переходят в токи проводимости по его стенкам (пунктир на рис. 26.4). Хотя на стенках волновода $E \rightarrow 0$, но при $\gamma \rightarrow \infty$ плотность тока проводимости в стенках $\delta = \gamma E$ имеет конечное значение. Для измерительных целей в стенках волновода делают прорезы (щели), располагая их так, чтобы они не препятствовали протеканию токов проводимости.

§ 26.3. Волновое сопротивление. Фазовая и групповая скорости. Под *волновым сопротивлением* волновода $Z_{\text{вв}}$ понимают отношение комплексных значений взаимно перпендикулярных составляющих $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Так, для основной волны H_{10}

$$Z_{\text{вв}} = \dot{E}_y / \dot{H}_x = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{2a}\right)^2}. \quad (26.22)$$

Зависимость $Z_{\text{вв}}$ от $\lambda_c/2a$ для волны H_{10} изображена на рис. 26.5, а; $2a$ — наибольшая из возможных длина волны в данном волноводе.

Скорость перемещения по волноводу неизменного фазового состояния $v_{\text{фв}}$ направлена под некоторым углом к оси волновода

$$v_{\text{фв}} = \frac{j\omega}{k_p} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - k^2}} = \frac{v_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{2a}\right)^2}}. \quad (26.23)$$

Зависимость $v_{\text{фв}}$ от частоты называют дисперсией. Так как $\lambda_c/(2a) < 1$, то $v_{\text{фв}}$ больше скорости света. Энергия вдоль оси волновода передается с групповой скоростью $v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk_p} = v_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{2a}\right)^2}$. Величины $v_{\text{фв}}$ и $v_{\text{гр}}$ можно сопоставить соответственно со скоростью смыкания кромок ножниц и скоростью движения навстречу друг другу рукояток этих ножниц.

Рис. 26.5, б иллюстрирует связь между длиной волны в свободном пространстве $\lambda_c = v_c/f$, длиной волны в волноводе $\lambda_{\text{в}} = \frac{v_{\text{фв}}}{f}$ и групповой длиной волны $\lambda_{\text{гр}} = v_{\text{гр}}/f$ — расстоянием, на которое перемещается энергия вдоль оси волновода за одно колебание:

$$\lambda_{\text{в}} \lambda_{\text{гр}} = \lambda_c^2 \quad \text{или} \quad v_{\text{фв}} v_{\text{гр}} = v_c^2.$$

Для определения энергии, переносимой электромагнитной волной, бегущей по волноводу, следует подсчитать поток продольной составляющей вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}$ через поперечное сечение волновода. Так, в случае основной волны H_{10} необходимо подсчитать поток вектора $\vec{\Pi} = [\vec{E}_y \vec{H}_x^*]$, учтя, что $\vec{E}_y$ и $\vec{H}_x$ совпадают по фазе:

$$-\int_S \vec{\Pi} d\vec{s} = \frac{ab H_m^2 Z_{\text{вв}}}{4}. \quad (26.24)$$

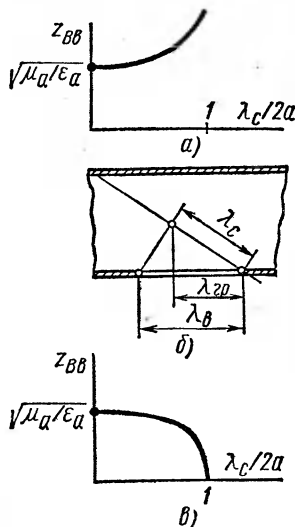


Рис. 26.5

§ 26.4. **Решение для Е-волны.** Простейшим типом волн ТМ (Е-волн) является волна E_{11} , имеющая компоненты E по осям x, y, z и компоненты H по осям x и y . Если соответствующие комплексные коэффициенты, включающие и e^{-kz} , обозначить через $\dot{C}_x, \dot{C}_y, \dot{C}_z$ для E -компонент и $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ для H -компонент, то для волны E_{11}

$$\dot{E}_x = \dot{C}_x \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \dot{E}_y = \dot{C}_y \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; \quad \dot{E}_z = \dot{C}_z \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$H_x = \dot{C}_1 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; \quad H_y = \dot{C}_2 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \dot{H}_z = 0.$$

Для волны E_{11} волновое сопротивление $Z_{вв} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{2a}\right)^2}$ (рис. 26.5, в).

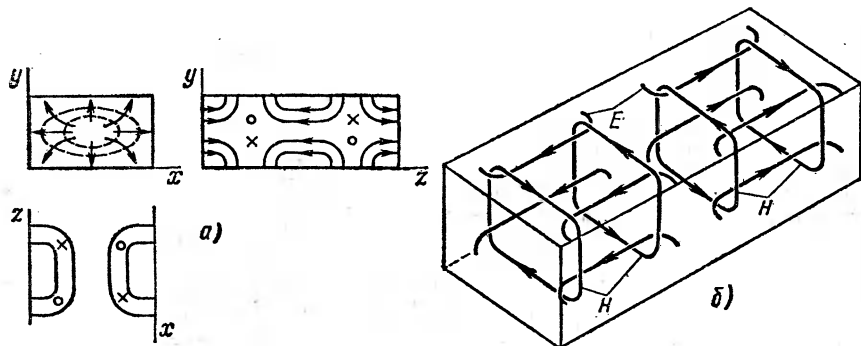


Рис. 26.6

На рис. 26.6, а в трех проекциях изображена картина поля волны E_{11} , где сплошные линии соответствуют компонентам E , пунктирные (а также кружки и крестики) — H ; на рис. 26.6, б дана объемная картина поля. Линии E замыкаются по стенкам волновода.

§ 26.5. **Аналогия между волноводом и линией с распределенными параметрами.** Между волноводом и линией без потерь с распределенными параметрами имеет место формальная аналогия. Сходными величинами и соотношениями являются: в линии $U, I, U = IZ_{\text{в}}, L_0, C_0, Z_{\text{в}} = \sqrt{L_0/C_0}$, в волновode $E, H, E = HZ_{\text{вв}}, \mu_a, \epsilon_a, Z_{\text{вв}} = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a} / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_c}{2a}\right)^2}$. Аналогию используют в различных целях, например для выяснения влияния неоднородностей (перегородок, окон) в волновode на распределение волн в областях вдали от неоднородностей. Для этого составляют схему замещения, в которой волновод заменен линией с распределенными параметрами, а неоднородность представляют некоторым четырехполюсником с сосредоточенными параметрами (которые находят опытным путем).

§ 26.6. **Граничные условия Леонтовича.** При расчете поля в волновode было принято, что стенки его имеют проводимость $\gamma \rightarrow \infty$. В действительности γ конечна, поэтому в стенках волновода есть потери энергии, которые подсчитывают методом последовательных приближений. Сначала определяют H_x и H_y на стенках волновода, считая $\gamma \rightarrow \infty$ и $E_x = E_y = 0$. Затем по найденным значениям H_x и H_y определяют приближенное значение $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_y$ на стенках, полагая, что γ конечна и что для стенок

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{j45^\circ}.$$

$$\text{Тогда } \dot{E}_x = Z_{\text{в}} \dot{H}_y \quad \text{и} \quad \dot{E}_y = -Z_{\text{в}} \dot{H}_x.$$

(а)

Два последних соотношения называют *граничными условиями Леонтовича*. Поясним их. На рис. 26.7 показана поверхность стенки волновода. Оси декартовой системы (местной системы координат) расположены так, что ось z (орт $\vec{k}$) направлена в глубь стенки. Составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, образующие поток вектора $\vec{P}$ в глубь стенки, в общем случае имеют x и y компоненты:

$$\vec{H} = \vec{i}H_x + \vec{j}H_y + \vec{k}H_z, \quad \vec{E} = \vec{i}\dot{E}_x + \vec{j}\dot{E}_y. \quad (б)$$

Для точек проводящей среды (на стенках волновода)

$$Z_{\text{в}} [\vec{H}\vec{k}] = \vec{E}. \quad (в)$$

Подставляя (б) в (в) и сопоставляя слагаемые с одинаковыми ортами, получаем (а). Потери в стенках равны потоку вектора Пойнтинга внутрь стенок.

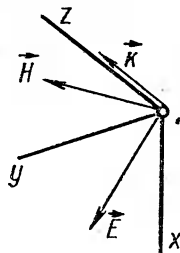


Рис. 26.7

§ 26.7. Запредельный волновод. За счет того что при конечной γ на стенках волновода $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_y$ хотя и малы, но все же не равны нулю, картина поля в волноводе несколько отлична от картины поля при $\gamma \rightarrow \infty$. Практически оказывается, что энергия может передаваться по волноводу и при $\omega < \omega_{\text{кр}}$ (до некоторой частоты ω_1). При этом $Z_{\text{вв}}$ оказывается комплексным числом. Волновод, работающий при $\omega < \omega_{\text{кр}}$ (до некоторой частоты ω_1), называют *запредельным*; его используют как ослабитель. При $\omega \leq \omega_1$ структура поля в волноводе изменяется так, что оно становится не волновым, а по типу электростатического поля для E -волны и магнитного поля постоянного тока для H -волны. Эти поля рассчитывают по методу зеркальных изображений от стенок (зарядов или токов соответственно).

§ 26.8. Линии с поверхностными волнами и полосковые линии. Вместо волноводов иногда применяют линии с поверхностными волнами и полосковые линии.

Линия с поверхностной волной обычно представляет собой металлическую пластинку (стерженек), окруженную слоем диэлектрика.

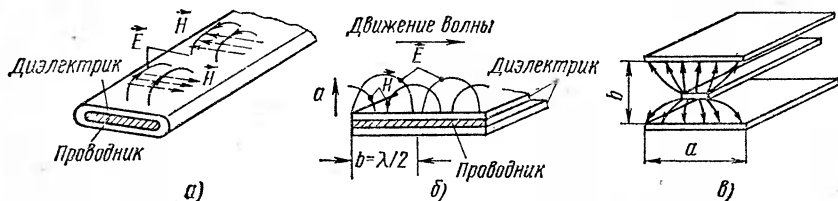


Рис. 26.8

Поверхность металла и диэлектрика является направляющей системой для бегущих волн. Скорость движения волны вдоль этой линии меньше скорости движения волны, если бы она распространялась в свободном пространстве без этих направляющих, т. е. линия играет роль замедляющей системы. Замедление обусловлено тем, что для удовлетворения граничных условий должны быть одинаковы значения фазовых скоростей вне диэлектрического слоя и внутри его.

Схематически картина поля поверхностной волны (в аксонометрии) изображена на рис. 26.8, а. На рис. 26.8, б показана картина линий E и H вдоль линии. Эта картина позволяет понять, почему относительно мало излучение энергии в пространство, окружающее линию.

Вертикальные пунктирные линии, проведенные на рис. 26.8, б на расстоянии $b = \lambda/2$, это как бы две мысленно проведенные стенки обычного прямоугольного волновода, две другие стенки которого удалены друг от друга на расстояние $a \rightarrow \infty$. Коэффициент распространения k_p для такого волновода не будет мнимым числом и потому в направлении, перпендикулярном пластинке, волна будет распространяться с затуханием.

Полосковая линия представляет собой две металлические полосы, в пространстве между которыми параллельно им расположена более узкая полоска или круглый стерженек. Картина поля показана на рис. 26.8, в. Излучение в окружающее пространство относительно мало, если $a > 5b$. Преимущества полосковых линий по сравнению с волноводами — простота изготовления, малый вес и дешевизна.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение волноводу, объемному резонатору, линии с поверхностными волнами и полосковой линии. 2. Начиная, примерно, с каких частот энергию передают по волноводу? 3. Каким соотношением связана постоянная распространения k_p с геометрическими размерами волновода a и b и с числами m и n ? 4. Как определить критическую частоту ω_0 , ниже которой электромагнитная волна теоретически не может распространяться вдоль волновода без затухания? 5. Начертите картины волн типа H_{10} и типа E_{11} . 6. Что понимают под $Z_{вв}$ и как оно зависит от $\lambda_c/2a$ для волн типа H_{10} и для волн типа E_{11} ? 7. Каков физический смысл групповой скорости? 8. Почему превышение скорости света фазовой скоростью не противоречит утверждению, что все физические процессы происходят со скоростью, не большей скорости света?

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ СЕДЬМАЯ

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

§ 27.1. Движение электрона в равномерном магнитном поле, неизменном во времени и направленном перпендикулярно скорости. В § 27.1 — 27.6 под заряженной частицей понимаем электрон. Заряд его обозначим $q = -q_e$ и массу m ; $q_e = 1,601 \cdot 10^{-19}$ К, масса m при скорости движения, значительно меньшей скорости света, равна $0,91 \cdot 10^{-27}$ г. Полагаем, что имеет место достаточно высокий вакуум, так что при движении электрон не сталкивается с другими частицами. На электрон, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле индукции $\vec{B}$, действует сила Лоренца $\vec{f} = q[\vec{v} \vec{B}]$.

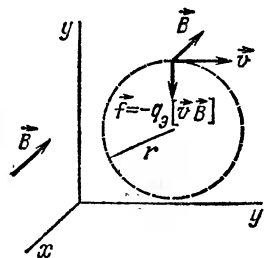


Рис. 27.1

На рис. 27.1 учтено, что заряд электрона отрицателен, что скорость его $\vec{v} = j\omega$ направлена по оси y , а индукция $\vec{B} = -B\vec{x}$ по оси $-x$. Сила $\vec{f}$ направлена перпендикулярно скорости и является центробежной силой. Она изменяет направление скорости, не влияя на ее величину. (Вертикальная ось z , а не y).

Электрон будет двигаться по окружности радиусом r с угловой частотой ω_c , которую называют циклотронной частотой. Центробежное ускорение равно силе f , деленной на массу:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{q_e v B}{m}. \quad \text{Отсюда } r = \frac{mv}{Bq_e}. \quad (27.1)$$

$$\text{Время одного оборота } T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{Bq_3}.$$

Следовательно,

$$\omega_{\text{ц}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{Bq_3}{m}. \quad (27.2)$$

§ 27.2. Движение электрона в неизменном во времени магнитном поле, когда скорость электрона не перпендикулярна силовым линиям. Рассмотрим два случая: в первом — электрон будет двигаться в равномерном, во втором — в неравномерном поле.

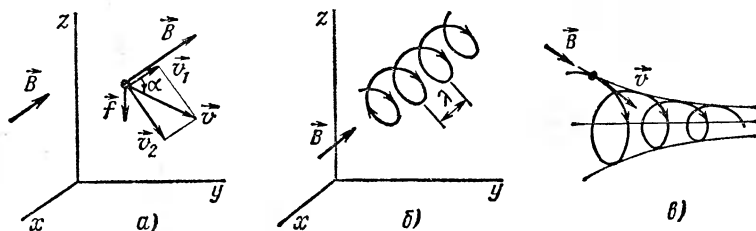


Рис. 27.2

1. Движение в равномерном поле. Через α на рис. 27.2, а обозначен угол между скоростью электрона $\vec{v}$ и индукцией $\vec{B}$. Разложим $\vec{v}$ на $\vec{v}_1$, направленную по $\vec{B}$ и численно равную $v \cos \alpha$, и на $\vec{v}_2$, направленную перпендикулярно $\vec{B}$ и численно равную $v \sin \alpha$. Так как $[\vec{v}_1, \vec{B}] = 0$, то наличие составляющей скорости $\vec{v}_1$ не вызывает силы воздействия на электрон. Движение со скоростью $\vec{v}_2$ приводит к вращению электрона вокруг линии $\vec{B}$, подобно тому, как это было рассмотрено в § 27.1. В целом электрон будет двигаться по спирали рис. 27.2, б, осевой линией которой является линия магнитной индукции. Радиус спирали $r = \frac{v_2 m}{Bq_3}$, шаг спирали

$$\lambda = T v_1 = \frac{2\pi m}{Bq_3} v_1. \quad (27.3)$$

Поступательное и одновременно вращательное движение иногда называют дрейфом электрона.

2. Движение в неравномерном поле. Если магнитное поле неравномерно, например сгущается (рис. 27.2, в), то при движении по спирали электрон будет попадать в точки поля, где индукция $\vec{B}$ увеличивается. Но чем больше B , тем при прочих равных условиях меньше радиус спирали r [см. формулу (27.2)]. Дрейф электрона будет происходить в этом случае по спирали со все уменьшающимся радиусом. Если бы магнитные силовые линии образовывали расходящийся пучок, то электрон при своем движении попадал бы в точки поля со все уменьшающейся индукцией и радиус спирали возрастал бы.

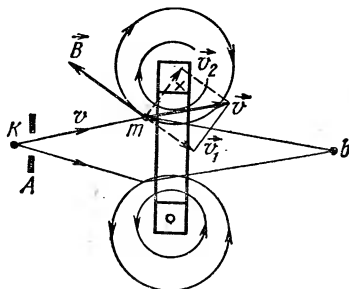


Рис. 27.3

§ 27.3. Фокусировка пучка электронов постоянным во времени магнитным полем (магнитная линза). Из катода электронного прибора (рис. 27.3) выходит расходящийся пучок электронов. Со скоростью $\vec{v}$ электроны входят в неравномерное магнитное поле узкой цилиндрической катушки с током.

Разложим скорость электрона $\vec{v}$ в произвольной точке m на две составляющие: $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

Первая $\vec{v}_1$ направлена противоположно $\vec{B}$, а вторая $\vec{v}_2$ — перпендикулярно $\vec{B}$. Возникшая ситуация повторяет рассмотренную в § 27.2. Электрон начнет двигаться по спирали, осью которой является $\vec{v}_1$. В результате электронный пучок фокусируется в точке b .

§ 27.4. Движение электронов в равномерном электрическом поле. Принцип работы электронного осциллографа. Электрон, пройдя расстояние от катода K до узкого отверстия в аноде A (рис. 27.4 а), под действием ускоряющего напряжения $U_{ак}$ увеличивает свою кинетическую энергию на величину работы сил поля.

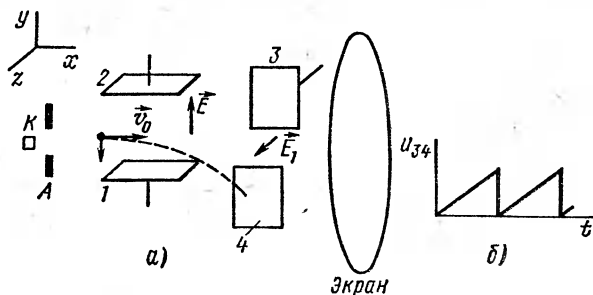


Рис. 27.4

Скорость v_0 , с которой электрон будет двигаться после выхода из отверстия в аноде, найдем из соотношения $\frac{mv_0^2}{2} = q_3 U_{ак}$:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2q_3 U_{ак}}{m}}.$$

При дальнейшем прямолинейном движении по оси x электрон попадает в равномерное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$ между отклоняющимися пластинами 1 и 2 (находятся в плоскостях, параллельных плоскости zox). Напряженность $\vec{E}$ направлена вдоль оси y . Пока электрон движется между отклоняющимися пластинами, на него действует постоянная сила $\vec{F}_y = -q_3 \vec{E}$, направленная по оси $-y$. Под действием этой силы электрон движется вниз равноускоренно, сохраняя постоянную скорость v_0 вдоль оси x . В результате в пространстве между отклоняющимися пластинами электрон движется по параболе. Когда он выйдет из поля пластин 1—2, в плоскости yox он будет двигаться по касательной к параболе. Далее он попадает в поле пластин 3—4, которые создают развертку во времени. Напряжение U_{34} между пластинами 3—4 и напряженность поля между ними E_1 линейно нарастают во времени (рис. 27.4, б). Электрон получает отклонение в направлении оси z , что и дает развертку во времени.

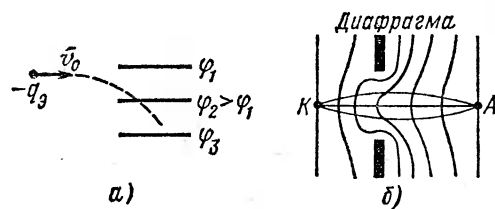


Рис. 27.5

§ 27.5. Фокусировка пучка электронов постоянным во времени электрическим полем (электрическая линза). Фокусировка основана на том, что, проходя через участок неравномерного электрического поля, электрон отклоняется в сторону эквипотенциали с большим значением потенциала (рис. 27.5, а). Электрическая линза

образована катодом, испускающим электроны, анодом, куда пучок электронов приходит сфокусированным, и фокусирующей диафрагмой, представляющей собой пластинку с круглым отверстием в центре (рис. 27.5, б). Диафрагма имеет отрицательный потенциал по отношению к окружающим ее точкам пространства, вследствие этого эквипотенциали электрического поля как бы выпучиваются через диафрагму по направлению к катоду. Электроны, проходя через отверстие в диафрагме и отклоняясь в сторону, фокусируются на аноде.

§ 27.6. Движение электрона в равномерных, взаимно перпендикулярных, неизменных во времени магнитных и электрических полях. Пусть электрон с зарядом $q = -q_3$ и массой m с начальной скоростью $\vec{v}_0$ оказался при $t = 0$ в начале координат (рис. 27.6, а) в магнитном и электрическом полях. Магнитная индукция на-

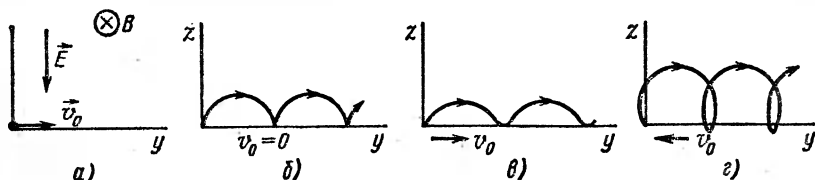


Рис. 27.6

правлена по оси $-x$: $\vec{B} = -i\vec{B}$, т. е. $B_x = B$. Напряженность электрического поля направлена по оси $-z$: $\vec{E} = -k\vec{E}$, т. е. $E_z = E$. Движение электрона будет происходить в плоскости zoy со скоростью $\vec{v} = \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$. Уравнение движения

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -q_3 \vec{E} - q_3 [\vec{v} \vec{B}],$$

или

$$\vec{j}m \frac{dv_y}{dt} + \vec{k}m \frac{dv_z}{dt} = \vec{k}(q_3 E - q_3 v_y B) + \vec{j}v_z B q_3.$$

Следовательно, $m \frac{dv_y}{dt} = q_3 v_z B$; $m \frac{dv_z}{dt} = q_3 E - q_3 v_y B$.

В соответствии с формулой (27.2) заменим $\frac{q_3 B}{m}$ на циклотронную частоту $\omega_{\text{ц}}$. Тогда

$$\frac{dv_y}{dt} = \omega_{\text{ц}} v_z; \quad (27.4)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q_3 E}{m} - \omega_{\text{ц}} v_y. \quad (27.5)$$

Продифференцируем (27.4) по t и в правую часть уравнения подставим (27.5):

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_{\text{ц}}^2 v_y = \omega_{\text{ц}} \frac{q_3 E}{m}. \quad (27.6)$$

Решим уравнение классическим методом: $v_y = v_{y\text{пр}} + v_{y\text{св}}$:

$$v_{y\text{пр}} = \frac{q_3 E}{m \omega_{\text{ц}}} = \frac{E}{B}; \quad v_{y\text{св}} = A \sin(\omega_{\text{ц}} t + \varphi).$$

Составим два уравнения для определения постоянных интегрирования. Так как при $t=0$ $v_y=v_0$, то $A \sin v + \frac{E}{B} = v_0$. При $t=0$ $v_z=0$. Поэтому $\left(\frac{dv_y}{dt}\right)_{t=0} = 0$, или $A \cos v = 0$. Отсюда $v=90^\circ$ и $A=v_0 - \frac{E}{B}$.

Таким образом, $v_y = \frac{E}{B} + \left(v_0 - \frac{E}{B}\right) \cos \omega_{\text{ц}} t$; $v_z = \frac{1}{\omega_{\text{ц}}} \frac{dv_y}{dt} = \left(\frac{E}{B} - v_0\right) \sin \omega_{\text{ц}} t$.

Пути, пройденные электроном по осям y и z :

$$y = \int_0^t v_y dt = \frac{E}{B} t - \frac{\frac{E}{B} - v_0}{\omega_{\text{ц}}} \sin \omega_{\text{ц}} t,$$

$$z = \int_0^t v_z dt = -\frac{\frac{E}{B} - v_0}{\omega_{\text{ц}}} (1 - \cos \omega_{\text{ц}} t).$$

На рис. 27.6, б, в, г, изображены три характерных случая движения при различных значениях v_0 . На рис. 27.6, б трохоида при $v_0 = 0$, максимальное отклонение по оси z равно $z_{\text{max}} = \frac{2mE}{q_0 B^2}$.

Если $v_0 > 0$ и направлена по оси $+y$, то траекторией является растянутая трохоида (рис. 27.6, в) с максимальным отклонением $z_{\text{max}} = \frac{2m}{q_0 B^2} \left(\frac{E}{B} - v_0\right)$.

Если $v_0 < 0$ и направлена по оси $-y$, то траекторией будет сжатая трохоида (рис. 27.6, г) с $z_{\text{max}} = \frac{2m}{q_0 B^2} \left(\frac{E}{B} + v_0\right)$.

Когда магнитное и электрическое поля мало отличаются от равномерных, траектории движения электронов близки к трохоидам.

§ 27.7. Движение заряженных частиц в кольцевых ускорителях. Циклотрон представляет собой две полые камеры в виде полуцилиндров из проводящего неферромагнитного материала. Эти камеры находятся в сильном равномерном магнитном поле индукции $\vec{B}$, направленном на рис. 27.7 сверху вниз. Камеры помещают в вакуумированный сосуд (на рисунке не показан) и присоединяют к источнику напряжения $U_m \cos \omega t$.

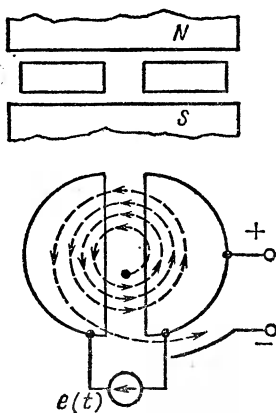


Рис. 27.7

При $t=0$, когда напряжение между камерами имеет максимальное значение, а потенциал левой камеры положителен по отношению к правой, в пространстве между камерами вводят положительный заряд q . На него будет действовать сила $q\vec{E}$. Заряд начнет двигаться слева направо и с начальной скоростью v_0 войдет в правую камеру. Но внутри камеры напряженность электрического поля равна нулю. Поэтому, пока он находится внутри камеры, на него не действует сила $q\vec{E}$, но действует сила $q[\vec{v} \vec{B}]$, обусловленная магнитным полем. Под действием этой силы положительный заряд,двигающийся со скоростью v , начнет движение по окружности радиусом $r = \frac{mv}{qB}$. Время, в течение

которого он совершит пол-оборота, $t_1 = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{qB}$.

Если частоту приложенного между камерами напряжения взять равной $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2t_1}$, то к моменту времени, когда заряд выйдет из правой камеры, он окажется

под воздействием электрического поля, направленного справа налево. Под действием этого поля заряд увеличивает свою скорость и входит в левую камеру, где совершает следующий полуоборот, но уже большего радиуса, так как он имеет большую скорость. После k полуоборотов заряженная частица приобретает такую скорость и энергию, какую она приобрела бы, если в постоянном электрическом поле она пролетела бы между электродами, разность потенциалов между которыми kU_m .

Вывод заряда из циклотрона осуществляется с помощью постоянного электрического поля, создаваемого между одной из камер (на рис. 27.7 правой) и вспомогательным электродом А. С увеличением скорости u , когда она становится соизмеримой со скоростью света, масса частицы m во много раз увеличивается. Увеличивается и время t_1 прохождения полуоборота. Поэтому одновременно с увеличением скорости частицы необходимо уменьшать либо частоту источника напряжения $U_m \cos \omega t$ (фазотрон), либо величину индукции магнитного поля (синхротрон), либо частоту и индукцию (синхрофазотрон).

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ВОСЬМАЯ

ОСНОВЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 28.1. Определение магнитной гидродинамики и краткая характеристика областей ее применения. Магнитная гидродинамика — это область науки, в которой изучают поведение плазмы или проводящей жидкости (расплавленных металлов или солей) в магнитном или электромагнитном полях.

Плазмой называют полностью или частично ионизованный газ, в котором концентрация положительных и отрицательных ионов одинакова, а суммарный заряд в единице объема равен нулю. Этот газ в магнитогидродинамическом приближении можно рассматривать как своеобразную проводящую жидкость. При движении жидкости (плазмы) в магнитном (электромагнитном) поле в ней возникают электрические токи, взаимодействие которых с магнитным полем вызывает механические силы, влияющие на характер ее движения.

За последние 25 лет магнитная гидродинамика особенно интенсивно развивалась в трех направлениях: а) исследование космических проблем; б) изучение способов воздействия на высокотемпературную плазму (ее термоизоляцию, импульсное ускорение, работы по управляемой термоядерной реакции); в) разработка методов электромагнитного воздействия на жидкий металл при его плавке, транспортировке, дозировании.

В космосе имеется полностью ионизованный газ (плазма). Проводимость его в некоторых случаях по порядку величины может приближаться к проводимости металла. Если учесть, что ионизованные газы занимают колоссальные объемы, то несмотря на большие расстояния между космическими телами, сопротивления между ними относительно невелики. В то же время магнитное поле в космосе может быть значительным. Так, регулярное магнитное поле солнца около $25 \cdot 10^{-4}$ Т, а в области солнечных пятен достигает $0,2 \div 0,4$ Т. Эти магнитные поля создают огромные медленно затухающие токи в плазме, взаимодействие которых с магнитным полем создает механические силы. Даже если эти силы и оказываются небольшими по величине, их влияние на движение плазмы значительно, так как они воздействуют на нее в течение длительного времени.

Различают высокотемпературную и низкотемпературную плазмы. По степени концентрации заряженных частиц плазму различают на разреженную и плазму с большой концентрацией. У высокотемпературной плазмы температура доходит до нескольких миллионов градусов. Низкотемпературная плазма имеет место, например, в столбе ионизованного газа при тлеющем и дуговом разрядах. Плазма с температурой нескольких тысяч градусов образуется, например, вблизи поверхности ракеты при ее вхождении в плотные слои атмосферы.

Магнитная гидродинамика наряду с другими науками является теоретической основой при разработке магнитогидродинамических генераторов, а также плазменных и ионных двигателей.

Применение жидкометаллических теплоносителей в паровых машинах и турбинах, охлаждение атомных реакторов щелочными металлами, натрием и калием,

разлив и транспортировка жидкого металла в металлургии — все это вызвало потребность в магнитных насосах, вентилях, дозаторах.

При исследовании поведения проводящей жидкости в магнитном поле свойства ее характеризуют проводимостью γ и магнитной проницаемостью μ_a . Значения γ и μ_a полагают известными из молекулярно-кинетической теории. Точно так же, когда изучают поведение плазмы в магнитном поле, значения γ и μ_a для нее считают известными из электронной теории. Обычно полагают, что среда является однородной и изотропной и что ее свойства не зависят от температуры. Однако при определенных условиях γ плазмы может оказаться величиной тензорной, например γ плазмы в области солнечной короны. Иногда необходимо рассматривать плазму как двухкомпонентную (не однокомпонентную) среду.

§ 28.2. Уравнения магнитной гидродинамики. Систему уравнений магнитной гидродинамики образуют следующие группы уравнений.

Уравнения Максвелла применительно к движущейся проводящей среде. Проводящая среда по отношению к некоторой системе отсчета движется со скоростью $\vec{v}$ во внешнем магнитном поле индукции $\vec{B}$. Скорость движения среды ничтожно мала по сравнению со скоростью света, поэтому релятивистские поправки в уравнения Максвелла не вносят. Ток смещения не учитывают, так как он ничтожно мал по сравнению с током проводимости.

Напряженность электрического поля равна сумме электрической и магнитной составляющих $\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]$.

Тогда

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma (\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]); \quad (28.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (28.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (28.3)$$

$$\vec{\delta} = \gamma (\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]), \quad (28.4)$$

где $\vec{\delta}$ — плотность тока.

Уравнение (28.4) представляет собой закон Ома. Решим системы (28.1) — (28.4) относительно вектора $\vec{B}$. С этой целью найдем $\vec{E}$ из (28.1), заменив $\vec{H}$ на $\vec{B}/\mu_a$:

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma \mu_a} \operatorname{rot} \vec{B} - [\vec{v}\vec{B}].$$

Подставим $\vec{E}$ в (28.2):

$$\frac{1}{\gamma \mu_a} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} - \operatorname{rot} [\vec{v}\vec{B}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Так как $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{B} - \nabla^2 \vec{B}$, а $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, то получим

$$\frac{1}{\gamma \mu_a} \nabla^2 \vec{B} + \operatorname{rot} [\vec{v}\vec{B}] = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (28.5)$$

Уравнение Навье—Стокса выражает собой второй закон Ньютона применительно к единице объема проводящей среды, движущейся в магнитном поле.

Произведение массы единицы объема ρ , движущейся со скоростью $\vec{v}$ жидкости, на ускорение ее $\frac{d\vec{v}}{dt}$ равно сумме сил, действующих на единицу объема:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4,$$

где $\frac{d\vec{v}}{dt}$ — полная или материальная производная, учитывающая изменение $\vec{v}$ в данной точке во времени и в результате того, что точка наблюдения попадает в поле

с иными значениями $\vec{v}$ вследствие движения; $\vec{F}_1 = -\text{grad } p$ — сила, вызванная перепадом давления и направленная в сторону уменьшения давления (тогда как $\text{grad } p$ направлен в сторону увеличения давления); $\vec{F}_2 = \rho \vec{g}$ — сила тяжести, действующая на единицу объема; ($\vec{g}$ — ускорение силы тяжести в данной точке); $\vec{F}_3 = \rho \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}$ — сила вязкого трения на единицу объема; ν — кинематический коэффициент вязкости.

Сила вязкого трения взята пропорциональной второй производной скорости потому, что равна разности сил, действующих с каждых двух противоположных граней объема, отнесенной к расстоянию между гранями; $\vec{F}_4 = [\vec{\delta} \vec{B}]$ — электромагнитная сила. Выражение для нее получим из формулы (21.1), если ввести ток I в квадратные скобки и заменить произведением плотности тока $\vec{\delta}$ на сечение ΔS , через которое он проходит; затем обе части выражения $\vec{F} = [I \Delta S \vec{\delta} \vec{B}]$ разделить на выделенный объем проводящего тела $\Delta l \Delta S = \Delta l \Delta S$.

Силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ малы по сравнению с $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_4$ и поэтому их не учитывают. Окончательно имеем:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } p + [\vec{\delta} \vec{B}]. \quad (28.6)$$

Уравнение непрерывности, выражающее собой то обстоятельство, что изменение массы в элементарном объеме обусловлено притоком жидкости (плазмы),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0. \quad (28.7)$$

Уравнение теплового баланса

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T + \frac{\delta^2}{\gamma} + W_{\text{тр}} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad (28.8)$$

где $\rho c \frac{dT}{dt}$ — тепло, расходуемое на увеличение температуры объема; c — удельная теплоемкость; $\lambda \nabla^2 T$ — тепло, приносимое в единичный объем за счет теплопроводности; λ — коэффициент теплопроводности; $\frac{\delta^2}{\gamma}$ — джоулевы потери в единице объема; $W_{\text{тр}}$ — тепло, выделяющееся в объеме в силу наличия трения; p — давление; $p / \rho \cdot d\rho / dt$ — тепло при изменении плотности ρ .

В установившемся тепловом режиме температура T неизменна и в этом случае уравнение (28.8) не используется.

§ 28.3. Просачивание (диффузия) магнитного поля. Положим, что плазма неподвижна. Из уравнений (28.5) и (28.6) при $\vec{v} = 0$ следует:

$$\frac{1}{\gamma \mu_a} \nabla^2 \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (28.9)$$

$$[\vec{\delta} \vec{B}] = \text{grad } p. \quad (28.10)$$

Уравнение (28.9) является уравнением диффузии или уравнением теплопроводности, где $\frac{1}{\gamma \mu_a}$ — коэффициент диффузии. Если принять, что $\vec{B}$ имеет только одну не равную нулю составляющую в декартовой системе координат $\vec{B} = \vec{i} B_x(x, t)$, то решение (28.9) будет следующим:

$$B_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu^2 t}{\gamma \mu_a}} [a(\nu) \cos \nu x + b(\nu) \sin \nu x] d\nu, \quad (28.11)$$

где ν — параметр; $a(\nu)$ и $b(\nu)$ — постоянные интегрирования, определяемые из начальных и граничных условий.

Из (28.11) следует, что поле, просачиваясь сквозь плазму, затухает с постоянной времени:

$$\tau = \gamma \mu_a l^2, \quad (28.12)$$

где l — линейный размер области, занятой полем.

На расстоянии l укладывается одно колебание $\sin vx$ или $\cos vx$ при $v = 1$.

§ 28.4. Электромагнитный барьер. Согласно уравнению (28.10) $\text{grad } p$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\vec{\delta}$ и $\vec{B}$ (рис. 28.1). Отсюда следует, что при определенной конфигурации поля давление p может быть уравновешено электромагнитной силой. Это особенно важно хотя бы для кратковременной локализации плазмы с температурой порядка миллиона градусов, когда не приходится рассчитывать на барьеры из какого-либо вещества.

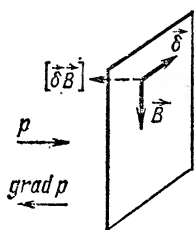


Рис. 28.1

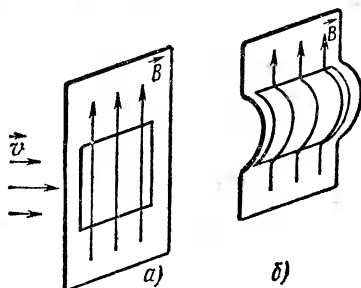


Рис. 28.2

§ 28.5. Вмороженное поле. Положим, что проводимость плазмы γ очень велика, теоретически стремится к бесконечности и что плазма находится в движении со скоростью $\vec{v}$. На рис. 28.2, а показана плоскость, в которой в исходном состоянии расположены линии магнитной индукции. Возьмем произвольный контур в этой плоскости и допустим, что скорость движения плазмы поперек линий $\vec{B}$ стала неодинаковой (см. стрелки для $\vec{v}$ на рис. 28.2, а). Через некоторое время плоскость деформируется и примет вид, изображенный на рис. 28.2, б. Силовые линии растянутся вместе с контуром, они как бы приклеены или вморожены в плазму (поток через контур останется неизменвшимся). Физически это объясняется тем, что при движении плазмы поперек линий $\vec{B}$ в ней индуцируются токи, поле которых, складываясь с первоначальным, так его деформирует, что силовые линии смещаются вместе с плазмой. Практически проводимость γ не бесконечно велика и поэтому деформация линий $\vec{B}$ несколько отстает от деформации контура.

§ 28.6. Возникновение волны в плазме. При определенных условиях в плазме могут возникать магнитогидродинамические волны. Для выяснения механизма их возникновения обратимся к рис. 28.3. Для упрощения выкладок примем, что проводимость плазмы $\gamma \rightarrow \infty$.

Прямоугольная система координат расположена в плазме так, что внешнее магнитное поле индукции $\vec{B}_0$ направлено по оси z . Положим, что по какой-то причине слой плазмы 1 (рис. 28.3, б) начал двигаться со скоростью $\vec{v}$ в направлении оси y . Так как движение этого слоя есть движение проводящего тела в магнитном поле, то в каждой точке слоя 1 возникнет напряженность поля $[\vec{v}\vec{B}] = \vec{v}B_0$. Под ее действием в плазме возникнут токи проводимости с плотностью $\vec{\delta} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \vec{B}$, замыкающиеся через соседние слои, как показано на рис. 28.3, а. Результирующая индукция $\vec{B}$ равна сумме индукции внешнего поля $\vec{B}_0$ и индукции $\vec{b}$ от токов проводимости: $\vec{B} = \vec{jb} + k\vec{B}_0$.

На движущийся в магнитном поле ток будет действовать механическая сила, в каждой точке слоя равная

$$[\vec{\delta}\vec{B}] = \frac{1}{\mu_a} [\text{rot } \vec{B}\vec{B}] = \frac{1}{\mu_a} \left[(-\vec{i} \frac{\partial b}{\partial z}) (\vec{j}b + \vec{k}B_0) \right] = \vec{k} \left(-b \frac{\partial b}{\partial z} \right) + \vec{j}B_0 \frac{\partial b}{\partial z}.$$

Сила $\vec{F}_1$, действующая на слой плазмы 1, начавший двигаться первым, будет замедлять его движение. Слои 2 и 3, расположенные выше и ниже слоя 1 (в них токи направлены в противоположную сторону по сравнению с током в слое 1), будут испытывать силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, под воздействием которых слои начнут двигаться по оси y ,

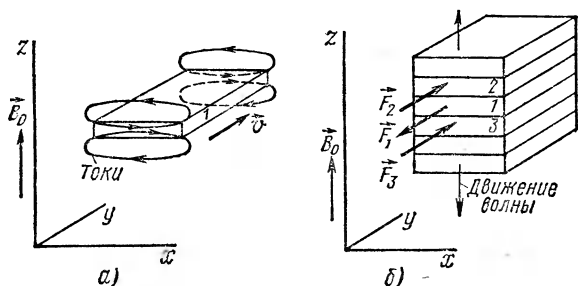


Рис. 28.3

Вдоль направления внешнего магнитного поля возникают две волны, распространяющиеся со скоростью $v_1 = \pm kc_1$. Одна из них распространяется вверх, другая — вниз. Волны будут поперечными — слои плазмы движутся перпендикулярно направлению распространения волны. Рассмотренный тип волн называют волнами Альфена.

Давление p волны изменяется только в направлении оси z :

$$\text{grad } p = \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Уравнение (28.5) имеет только одну проекцию на ось y :

$$B_0 \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial t}. \quad (28.13)$$

Уравнение (28.6) дает проекции на оси y и z :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{B_0}{\mu_a} \frac{\partial p}{\partial z}; \quad (28.14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{b}{\mu_a} \frac{\partial b}{\partial z}. \quad (28.15)$$

Дифференцируя (28.13) по t и (28.14) по z , получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\rho \mu_a} \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}.$$

Решение его следующее: $b = f_1 \left(t - \frac{z}{v_1} \right) + f_2 \left(t + \frac{z}{v_1} \right)$.

Скорость распространения волны в направлении оси z $v_1 = \frac{B_0}{\sqrt{\rho \mu_a}}$. При $B_0 = 1 \div 1,5 \text{ T}$, $\rho = 1 \div 10^4 \text{ кг/м}^3$; значение v_1 составляет от нескольких сантиметров

до нескольких десятков метров в секунду. Если $b = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega z}{v_1} \right)$, то из уравнения (28.13) скорость движения плазмы $v = - \frac{A}{\sqrt{\rho \mu_a}} \sin \left(\omega t - \frac{\omega z}{v_1} \right)$.

Из уравнения (28.15) давление $p = p_0 - \frac{A^2}{2\mu_a} \sin^2 \left(\omega t - \frac{\omega z}{v_1} \right)$, где A и p_0 — некоторые постоянные. Плотность тока $\vec{\delta} = i\vec{\delta}_x$:

$$\delta_x = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot}_x \vec{B} = - \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{A\omega}{B_0} \sqrt{\frac{\rho}{\mu_a}} \cos \left(\omega t - \frac{\omega z}{v_1} \right).$$

Если учесть, что γ конечна, не бесконечно велика, то вследствие потерь от вихревых токов и от вязкого трения амплитуда волны A по мере продвижения волны вдоль оси z будет затухать по экспоненте.

В плазме могут возникать и другие типы волн, при которых силовые линии, увлекаемые частицами плазмы или жидкости, участвуют в турбулентном движении.

§ 28.7. Эффект сжатия (пинч-эффект). В цилиндрическом столбе электрической дуги (рис. 28.4) нити тока параллельны. Каждый элемент этой нити находится в магнитном поле индукции $\vec{B}$, направленной по касательной к нити тока.

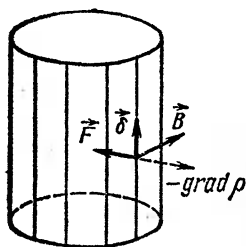


Рис. 28.4

На каждый элемент тока с плотностью $\vec{\delta}$ действует сила $\vec{F} = [\vec{\delta}\vec{B}]$. Под действием этих сил нити тока стремятся сжаться, а столб дуги уплотниться. Но температура газа (плазмы), а следовательно, и давление будут максимальны на оси. Силе сжатия противостоит давление. Система находится в равновесии, когда электромагнитная сила сжатия уравновешена силой давления.

§ 28.8. Принцип работы магнитного насоса и магнитного вентиля. В магнитном насосе механическое воздействие на проводящую жидкость создается магнитным полем. Принцип работы насоса кондукционного типа поясняет рис. 28.5. Участок трубопровода находится в скрещенных магнитном и электрическом полях. Магнитное поле направлено сверху вниз, электрическое — от точки m к точке n . Под действием электрического поля в направлении от m к n через жидкость течет ток I . На каждый элемент объема жидкости с плотностью тока $\vec{\delta}$ действует сила $\vec{F} = [\vec{\delta}\vec{B}]$, направленная согласно с направлением движения жидкости по трубопроводу, т. е. устройство действует как насос.

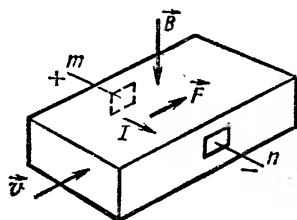


Рис. 28.5

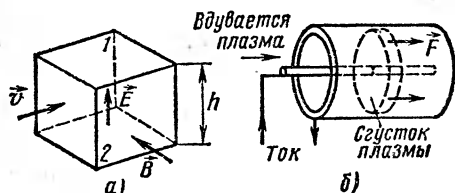


Рис. 28.6

Если при прочих равных условиях изменить направление электрического или магнитного поля, то возникнет сила, препятствующая движению. В этом случае устройство будет работать в качестве тормоза или вентиля. Управлять величиной силы можно, изменяя величину B .

§ 28.9. Принцип работы магнитного гидродинамического генератора. Через канал с большой скоростью $\vec{v}$ продувают плазму, нагретую до высокой температуры

(рис. 28.6, а). В перпендикулярном направлении создают сильное магнитное поле индукции $\vec{B}$. На ионы плазмы воздействует лоренцова сила $\vec{E} = [\vec{v}\vec{B}]$. Под ее действием положительные заряды движутся по направлению $\vec{E}$ к электроду 1, а отрицательные заряды — встречно $\vec{E}$ к электроду 2. Между электродами возникает разность потенциалов, равная Eh . Если электроды замкнуть на сопротивление R , то по замкнутому контуру потечет ток, а плазма будет испытывать тормозящее воздействие.

§ 28.10. Принцип работы плазменного реактивного двигателя. Сгустки плазмы вдуваются в полость между проводящей трубкой и проводником, расположенным на оси трубки (рис. 28.6, б). Плазма замыкает собой трубку и осевой проводник. Ток, протекающий по трубке, плазме и осевому проводнику, создает магнитное поле, которое выдувает плазму вправо. Плазма, получив ускорение, с силой выбрасывается из трубки в вакуум вправо, а трубка получает импульс движения влево.

ПРИЛОЖЕНИЕ Е'

**РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ПО МЕТОДУ СЕТОК
И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ПО МЕТОДУ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТОК**

Довольно широко распространены: а) числовой расчет электрических и магнитных полей по методу сеток; б) моделирование электрических и неэлектрических (магнитных) полей по методу электрических сеток. Несмотря на близость названий, содержание методов существенно различно.

§ Е'.1. Расчет полей по методу сеток. Метод сеток представляет собой числовой метод интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных путем сведения их к уравнениям в конечных разностях.

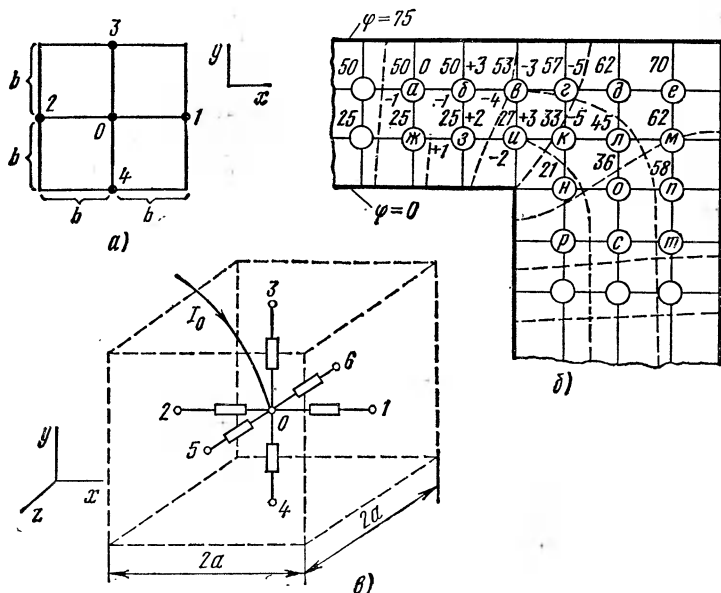


Рис. Е'.1

На рис. Е'.1, а изображен участок двухмерного поля. На нем показаны оси x и y декартовой системы и квадратная сетка со стороной b . Точки (узлы) сетки обозначены цифрами 0, 1, 2, 3, 4. Примем φ_0 — потенциал точки 0, φ_1 — потенциал точки 1 и т. д. Выведем приближенное соотношение между потенциалами φ_0 и φ_4 , вытекающее из уравнения Пуассона. Среднее значение первой производной $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ на участке

$I-0$ приближенно равно $\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)_{1-0} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{b}$; на участке $0-2$ $\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)_{0-2} = \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{b}$.

Вторая производная $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ в точке 0 приближенно равна разности средних значений первых производных $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ на участках $1-0$ и $0-2$, отнесенных к расстоянию b между серединами отрезков $1-0$ и $0-2$:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta^2\varphi}{\Delta x^2} = \frac{\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)_{1-0} - \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)_{0-2}}{b} = \frac{\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{b} - \frac{(\varphi_0 - \varphi_2)}{b}}{b} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0}{b^2}.$$

Аналогично, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \approx \frac{\varphi_3 + \varphi_4 - 2\varphi_0}{b^2}$.

Запишем уравнение Пуассона для двухмерного электростатического поля:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_a},$$

где $\rho_{\text{своб}}$ — свободный заряд в точке 0 .

Подставим в уравнение Пуассона приближенные выражения для $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$. Получим:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = -\frac{\rho_{\text{своб}}}{\varepsilon_a} b^2. \quad (E'.1)$$

Если поле описывается уравнением Лапласа, то $\rho_{\text{своб}} = 0$ и

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = 0. \quad (E'.2)$$

Уравнения (E'.1) и (E'.2) определяют связь между потенциалами квадратной сетки. Они являются основными в методе сеток. Чем меньше шаг сетки b , тем меньше погрешность от замены уравнений Пуассона или Лапласа соответственно на уравнения (E'.1) или (E'.2). При расчете по методу сеток применяют не только квадратные, но и иные сетки, например полярные. Для них имеются формулы в конечных разностях, в общем случае отличные от формул (E'.1) и (E'.2).

Допустим, что двухмерное поле, подчиняющееся уравнению Лапласа, ограничено некоторыми поверхностями и известны потенциалы этих поверхностей (задача Дирихле), либо известны значения производной от потенциала по нормали к каждой граничной поверхности во всех точках (задача Неймана). Возможны и комбинированные типы задач, когда для одной части граничных поверхностей известны значения потенциалов, а для другой — значения нормальной производной от потенциала.

Требуется найти значения потенциалов прямоугольной сетки этого поля. Последовательность расчета для задачи Дирихле проиллюстрируем на примере расчета поля, образованного двумя параллельными прямыми углами рис. E'.1, б. В месте поворота расстояние между параллельными сторонами угла изменяется. Потенциал верхней границы положим равным 75 единицам, нижней — нулю. Будем полагать, что объемные заряды отсутствуют.

1. Тонкими сплошными линиями нанесем квадратную сетку. Обозначим узлы получившихся квадратов буквами $a, б, в, г, д, \dots$ (расположены в кружках).

2. Произвольно выберем значения потенциалов узлов $a, б, в, \dots$ Объем дальнейшей вычислительной работы в значительной мере зависит от того, насколько близко к действительному выбрано первоначальное распределение потенциала. Поэтому следует стремиться к возможно более правдоподобию первоначальному распределению потенциала.

Для этой цели нанесем на рис. E'.1 приближенную картину силовых и эквипотенциальных линий и, руководствуясь ею, запишем начальные значения потенциалов узлов (цифры слева и вверху у каждого узла).

3. Для каждого узла находим величину остатка в формуле (Е'.2). Так, остаток для точки b равен $53 + 50 + 75 + 25 - 4 \cdot 50 = 3$. Записываем величину остатка в правом верхнем углу у каждого узла.

4. Поскольку в каждом узле остаток должен быть равен нулю, то дальнейший и наиболее трудоемкий этап расчета состоит в таком изменении потенциалов узлов, чтобы остатки во всех узлах не превышали некоторой заданной величины (скажем, 1 или 2).

Поэтому в одной из точек с наибольшим значением остатка изменяем потенциал приблизительно на $\frac{1}{4}$ от остатка (в рассматриваемом случае в точке b уменьшаем потенциал на единицу) и затем пересчитываем остатки во всех остальных узлах. Вновь полученные остатки записываем в левом нижнем углу у каждого узла (на рисунке они выписаны не для всех узлов). Такая операция выполняется несколько раз до тех пор, пока все остатки не станут равны или меньше заданной величины. Процесс является сходящимся. При расчетах используют счетные машины.

Метод применим для магнитных и электрических полей, линейных и нелинейных сред, для неизменных и изменяющихся во времени полей.

§ Е'.2. Моделирование полей по методу электрических сеток. Моделирование полей с помощью электрических сеток представляет собой метод экспериментального исследования полей, подчиняющихся уравнению Пуассона, путем измерения потенциалов узлов электрической сетки, которой заменяется сплошная среда. Положим, что требуется выяснить распределение потенциалов в некоторой области (сплошной среде), потенциалы границ которой заданы. Кроме того, известны электрическая или соответственно магнитная проницаемость среды, а также плотность распределенных источников в исследуемом поле (например, плотность свободных зарядов $\rho_{\text{своб}}$ в моделируемом электростатическом поле).

Исследуемое поле заменим полем в проводящей среде с проводимостью γ . Моделируемую область разделим на элементарные объемы, например на кубы. Каждый элементарный объем заменим электрической схемой замещения в соответствии с рис. Е'.1, в.

Пусть ребро куба имеет длину $2a$. Центр куба обозначим цифрой 0, а точки, лежащие в серединах его граней, — цифрами 1—6. Шаг сетки в направлении осей x, y, z обозначим $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = a$). Проводимость между любой из точек 1—6 и центральной точкой 0 $g = \gamma \frac{2a \cdot 2a}{a} = 4\gamma a$.

К узлу 0 от источника тока подтекает ток $I_0 = 2\delta(x, y, z) a^3$. К остальным узлам, не показанным на рис. Е'.1, в, подтекают свои токи. Эти токи, подводимые в центры кубов, выполняют функции распределенных источников в исходном поле. Значения токов определяются по заданной плотности распределенных источников. По первому закону Кирхгофа, сумма токов, подтекающих к узлу 0, должна быть равна нулю, т. е.

$$(\varphi_1 - \varphi_0)g + (\varphi_2 - \varphi_0)g + (\varphi_3 - \varphi_0)g + (\varphi_4 - \varphi_0)g + (\varphi_5 - \varphi_0)g + (\varphi_6 - \varphi_0)g + I_0 = 0. \quad (\text{Е'.3})$$

Потенциал точки 0

$$\varphi_0 = \varphi(x, y, z).$$

Потенциал точки 1

$$\varphi_1 = \varphi(x + \Delta x, y, z) \approx \varphi(x, y, z) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots$$

Потенциал точки 2

$$\varphi_2 = \varphi(x - \Delta x, y, z) \approx \varphi(x, y, z) - \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots$$

Следовательно,

$$(\varphi_1 - \varphi_0)g + (\varphi_2 - \varphi_0)g = (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} g = 4\gamma a^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Проделав аналогичные выкладки с остальными слагаемыми уравнения (Е.3), подставив в него выражение для I_0 и сократив на $4a^3$, получим уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\delta(x, y, z)}{\gamma}.$$

Таким образом, распределение потенциалов в электрической сетке с точностью до частных производных четвертого порядка от φ , умноженных на $a^2/4l$, удовлетворяет тому же уравнению, что и распределение потенциалов в сплошной среде.

Распределение потенциалов в узлах O элементарных объемов измеряется компенсационным способом.

Моделирование позволяет на относительно дешевой модели исследовать поля, с трудом или совсем не поддающиеся аналитическому расчету.

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

МЕТОД ГРИНА

§ Ж.1. Формулы Грина. Формулы Грина получают из теоремы Остроградского — Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS, \quad (\text{Ж.1})$$

где D_n — нормальная составляющая некоторого вектора $\vec{D}$ на поверхности S , ограничивающей объем V ; D_n направлена в сторону внешней нормали $\vec{n}$ по отношению к объему V .

Положим, $\vec{D} = \alpha \vec{F}$, где α — произвольный скаляр, а вектор $\vec{F}$ представим как градиент некоторой скалярной функции φ : $\vec{F} = \operatorname{grad} \varphi$. Тогда

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} (\alpha \operatorname{grad} \varphi) = \nabla (\alpha \nabla \varphi) = \alpha \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \nabla \alpha.$$

Подстановка в (Ж.1) дает:

$$\int_V (\alpha \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \nabla \alpha) dV = \oint_S D_n dS.$$

Учтем, что проекция вектора $\vec{D}$ на направление нормали $\vec{n}$ есть $\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n}$:

$$\int_V (\alpha \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \nabla \alpha) dV = \oint_S \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{Ж.2})$$

Формулу (Ж.2) называют *первой формулой Грина*.

Поменяв местами скаляры α и φ и вычтя одно равенство из другого, получим *вторую формулу Грина*:

$$\int_V (\alpha \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \alpha) dV = \oint_S \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{Ж.3})$$

§ Ж.2. Гармонические функции. *Гармонической* называют функцию, непрерывную в рассматриваемой области вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяющую уравнению Лапласа в этой области. Центральная симметричная функция $1/r$, где r — расстояние от некоторой фиксированной точки объема (например, от точки A рис. Ж.1, а) до текущей точки B , является гармонической функцией. Для плоскопараллельного поля гармоническая функция равна $\ln r$. Примем в формуле (Ж.3), что α и φ — гармонические функции, $\alpha = 1/r$ и функция φ

выполняет роль потенциала φ . Тогда $\nabla^2\varphi = 0$, $\nabla^2\alpha = 0$ для поверхности, ограничивающей область V , имеет место соотношение

$$\oint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right] dS = 0. \quad (\text{Ж.4})$$

§ Ж.3. Интеграл Грина для гармонических функций. Применим формулу (Ж.4) для определения потенциала в произвольной точке B объема V . С этой целью окружим точку B сферой S_B малого радиуса ρ (рис. Ж.1, б) и применим формулу (Ж.4) к поверхностям S и S_B :

$$\int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) dS + \int_{S_B} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial v} \right) dS = 0;$$

где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности S ; $\vec{v}$ — нормаль к поверхности S_B ; обе они внешние к объему V .

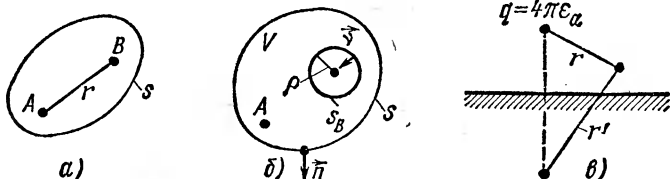


Рис. Ж.1

Устремим радиус ρ к нулю. При этом $\lim_{S_B} \int \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial v} dS = 0$, так как $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ — величина ограниченная (функция φ непрерывна в области V), S_B стремится к нулю, как ρ^2 , а $1/r$ возрастает, как $1/\rho$. При $\rho \rightarrow 0$ потенциал точек поверхности S_B примерно равен потенциалу φ_B точки B :

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial v} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} = \frac{1}{r^2}.$$

Кроме того, учтем, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{S_B} \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial v} dS \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \varphi_B \int_{S_B} \frac{\partial S}{r^2} = \varphi_B \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \varphi_B.$$

Таким образом, потенциал произвольной точки B внутри области V :

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi} \left[\int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) dS \right]. \quad (\text{Ж.5})$$

Он определяется значением потенциала и нормальной производной потенциала на поверхности, ограничивающей область V . Физически первое слагаемое фор-

мулы (Ж.5) обусловлено поверхностными зарядами, как бы вкрапленными в поверхность S , а второе — зарядами диполей на поверхности, т. е. двойным заряженным слоем.

§ Ж.4. Функция Грина. Положим, что в точке A рис. Ж.1, e находится точечный заряд $q = 4\pi\epsilon_a$, а поверхность S является проводящей и заземлена, т. е. потенциал ее равен нулю. Вследствие электростатической индукции на внутренней стороне поверхности возникают отрицательные наведенные заряды плотностью $-\sigma$, а на наружной $+\sigma$. Суммарный отрицательный заряд на внутренней поверхности равен суммарному положительному заряду на внешней поверхности и каждый из них численно равен q .

Обозначим расстояние произвольной точки B до точки A через r , а до произвольной точки на поверхности — через R . Тогда

$$\varphi_B = \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_S \frac{\sigma dS}{R}.$$

Если точка B будет находиться на поверхности S , то ее потенциал по условию задачи должен быть равен нулю.

Функцией Грина $G = \frac{1}{r} + g$ называют функцию, которая обладает свойством потенциала произвольной точки B в рассматриваемой задаче, т. е. она является гармонической функцией и принимает нулевое значение на поверхности S . Функция G определена через функцию g , которая представляет собой решение уравнения Лапласа для рассматриваемой задачи. Основная трудность решения методом функций Грина заключается в отыскании функции g . Она найдена лишь для некоторых частных случаев: например, в поле точечного заряда $q = 4\pi\epsilon_a$, расположенного на расстоянии h от проводящей плоскости (рис. Ж.1, e), $G = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$.

§ Ж.5. Определение потенциала φ через функцию Грина в общем случае. В объеме V , ограниченном поверхностью S , имеются объемные заряды ρ , распределенные с заданной плотностью, известны потенциалы поверхностей и функция Грина. Положим в формуле (Ж.4) $\alpha = g = G - 1/r$, учтем, что $\nabla^2\alpha = 0$, а $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$. Тогда

$$\int_V \left(G - \frac{1}{r}\right) \frac{\rho}{\epsilon_a} dV = \oint_S \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(G - \frac{1}{r}\right) - \left(G - \frac{1}{r}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS. \quad (\text{Ж.6})$$

Кроме того, из физических соображений следует, что потенциал произвольной точки B определяется объемными и поверхностными зарядами, а также двойным заряженным слоем (диполями) на границе:

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho dV}{r} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS. \quad (\text{Ж.7})$$

Вычтем (Ж.6) из (Ж.7), учтем, что функция Грина на поверхности S равна нулю. Получим формулу для определения потенциала произвольной точки φ_B через функцию Грина и ее нормальную производную:

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V G \rho dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS, \quad (\text{Ж.8})$$

где n — внешняя нормаль к объему. Примеры на применение формулы (Ж.8) см. в [9].

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод интегральных уравнений (ИУ) представляет собой метод расчета магнитных и электрических полей, основанный на введении вторичных источников и состоящий в сведении задачи к интегральным уравнениям, и их числового решения на ЭВМ. В настоящее время его применяют главным образом для решения двумерных задач, но с увеличением объема памяти ЭВМ он может быть применен и к трехмерным полям.

Имеется два варианта метода интегральных уравнений, отличающихся видом вторичных источников. Идея метода и его первый вариант предложены Г. А. Гринбергом [6]. Дальнейшее развитие метода и доведение его до практических расчетов осуществлено О. В. Тозони [15], Э. В. Колесниковым, И. Д. Маергойз и др. Разработка второго варианта метода осуществлена О. В. Тозони [16] и др.

§ 3.1. Первый вариант метода интегральных уравнений. Идею метода рассмотрим применительно к магнитному полю, образованному намагничивающими обмотками, геометрия и ток в которых известны, и намагниченными ферромагнитными телами. Однородно намагниченные ферромагнитные тела в расчетном смысле можно заменить вакуумом (воздухом), поместив на поверхность ферромагнитных тел поверхностные токи с плотностью σ на единицу длины (пояснения о поверхностных токах см. в § 14.24, где они были обозначены δ_m). Значение σ в различных точках поверхности неизвестно и подлежит определению. Значение плотности тока проводимости δ в обмотках известно.

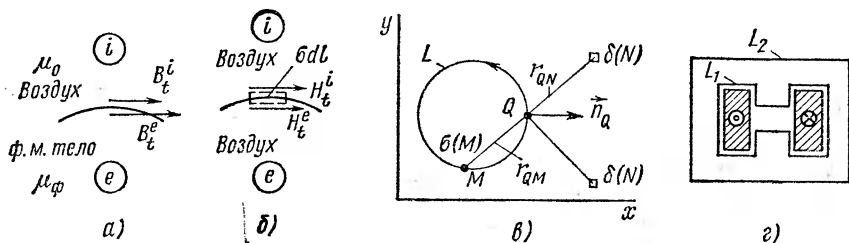


Рис. 3.1

Рассмотрим условия на границе между ферромагнитным телом (среда e) и воздухом (среда i) — рис. 3.1, a . На рис. 3.1, b показана та же граница, что и на рис. 3.1, a , но ферромагнитное (ф.м.) тело заменено воздухом, а на границе помещен поверхностный ток с плотностью σ на единицу длины.

Тангенциальные (о чем свидетельствует индекс t) составляющие напряженности поля на границе H_t^i в среде i и H_t^e в среде e состоят каждая из двух компонент: из составляющей H_t' , обусловленной всеми токами проводимости, протекающими по обмоткам электрического аппарата, и всеми поверхностными токами (их называют связанными токами) на границе ферромагнитной области, кроме поверхностного тока σdl , протекающего по рассматриваемому элементу поверхности, и из составляющей H_t'' , обусловленной поверхностным током σdl в рассматриваемом элементе поверхности ферромагнитного тела (выбран направленным к читателю).

Тангенциальные составляющие индукции на границе:

$$B_t^i = \mu_0 H_t^i, \quad B_t^e = \mu_\phi H_t^e.$$

Каждая из них состоит из двух компонент:

$$B_t^i = B_t' - B_t''; \quad B_t^e = B_t' + B_t'', \quad (3.1)$$

но

$$B_t' = \mu_0 H_t' \quad \text{и} \quad B_t'' = \mu_0 H_t'', \quad (3.2)$$

так как они определены, когда среда — неферромагнитна.

Применим закон полного тока к пунктирному контуру на рис. 3.1, б, охватывающему кусочек границы длиной dl . Получим

$$2H'_t = \sigma. \quad (3.3)$$

При составлении циркуляции по этому контуру учли, что по верхней и по нижней границам контура составляющих H'_t в соответствии с рис. 3.1, б нет. Так как тангенциальные составляющие напряженности поля на границе воздух — ферромагнитное тело равны, то

$$\frac{B'_t}{\mu_0} = \frac{B_t}{\mu_\Phi}, \quad (3.4)$$

где μ_Φ — магнитная проницаемость ферромагнитного тела.

Имея в виду (3.2), (3.3), (3.1), из (3.4) получаем

$$H'_t = \frac{\sigma}{2} \frac{\mu_\Phi + \mu_0}{\mu_\Phi - \mu_0}.$$

Следовательно,

$$B'_t = \mu_0 H'_t = \frac{\mu_0 \sigma}{2} \frac{\mu_\Phi + \mu_0}{\mu_\Phi - \mu_0}.$$

Отсюда находим поверхностную плотность тока для гладких участков поверхности ферромагнитного тела через B'_t , μ_Φ и μ_0 :

$$\sigma = \frac{2}{\mu_0} \frac{\mu_\Phi - \mu_0}{\mu_\Phi + \mu_0} B'_t. \quad (3.5)$$

Но B'_t можно определить как ротор от векторного потенциала A , который определяется всеми токами проводимости δ в обмотках и поверхностными токами σ на поверхности ферромагнитных тел.

Для плоскопараллельного поля

$$A = \frac{\mu_0}{2\pi} \oint_S \delta(N) \ln \frac{1}{r_{QN}} dS_N + \frac{\mu_0}{2\pi} \oint_L \sigma(M) \ln \frac{1}{r_{QM}} dl_M,$$

где A — значение вектора потенциала в произвольной точке наблюдения Q , расположенной на контуре ферромагнитного тела L ; N — произвольная точка сечения обмотки с током, плотность тока в которой $\delta(N)$; r_{QN} — расстояние от точки Q до точки N (рис. 3.1, в); M — произвольная точка на контуре L с плотностью поверхностного тока $\sigma(M)$.

Обход контура выберем против часовой стрелки, а нормаль n направим во внешнюю область по отношению к контуру L . Тогда $B'_t = -\frac{\partial A}{\partial n}$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{QN}} = -\frac{d}{dr_{QN}} \ln r_{QN} \frac{\partial r_{QN}}{\partial n} = \frac{1}{r_{QN}} \cos(r_{QN}, n),$$

то

$$B'_t = -\frac{\mu_0}{2\pi} \oint_S \frac{\delta(N) \cos(r_{QN}, n_Q)}{r_{QN}} dS_N - \frac{\mu_0}{2\pi} \oint_L \frac{\sigma(M) \cos(r_{QM}, n_Q)}{r_{QM}} dl_M. \quad (3.6)$$

Подставив формулу (3.6) в (3.5), получим интегральное уравнение второго рода Фредгольма относительно плотности поверхностного тока на контуре L ферромагнитного тела:

$$\sigma(Q) + \frac{1}{\pi} \lambda \oint_L \frac{\sigma(M) \cos(r_{QM}, n_Q)}{r_{QM}} dl_M = -F(Q). \quad (3.7)$$

Здесь $\lambda = \frac{\mu_\phi - \mu_0}{\mu_\phi + \mu_0}$;

$$F(Q) = \frac{1}{\pi} \lambda \int_S \frac{\delta(N) \cos(r_{QN}, n_Q)}{r_{QN}} dS_N. \quad (3.8)$$

Для каждой точки Q контура L функцию $F(Q)$ можно подсчитать заранее [до решения уравнения (3.7)], так как распределение тока проводимости $\delta(N)$ и геометрия магнитной системы известны. Если контуров, ограничивающих ферромагнитную область, несколько (т. е. область многосвязна) — например, на рис. 3.1, ϵ область ограничивают два контура L_1 и L_2 — то уравнение (3.7) заменяют системой уравнений (число уравнений равно числу контуров). В каждое уравнение входят слагаемые от поверхностных токов и в других контурах (а не только от поверхностных токов в своем контуре).

Уравнение типа (3.7) решают на ЭВМ итерационным методом, заменяя интегралы конечными суммами. Чтобы итерационный процесс сошелся, используют интегральные соотношения для контуров L , вытекающие из закона полного тока. После нахождения $\sigma(Q)$ определяют B'_z , а по ним и по A — любую точечную или интегральную характеристику поля.

Подробное рассмотрение первого варианта метода, составление программ для ЭВМ, числовые примеры и распространение метода на нелинейные магнитные системы читатель найдет в [15]. О применении метода к электростатическим полям см. [9].

§ 3.2. Второй вариант метода интегральных уравнений. Первый вариант метода ИУ имеет тот недостаток, что если параметр λ в уравнении (3.7) окажется близок к 1, то малая погрешность, допущенная при подсчете $F(Q)$ по формуле (3.8), приведет к большой погрешности при определении закона распределения σ . Чтобы этого недостатка избежать, в [16] описан второй вариант метода ИУ с иными вторичными источниками. Рассмотрим основы второго варианта. С этой целью запишем систему уравнений Максвелла сначала через векторы $\vec{B}$ и $\vec{E}$, а затем через векторы $\vec{D}$ и $\vec{H}$, полагая, что ϵ и μ являются функциями координат.

Первое уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} = \frac{1}{\mu_0} \left\{ \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{B} + \left[\operatorname{grad} \frac{1}{\mu}, \vec{B} \right] \right\} = \vec{\delta},$$

но

$$\operatorname{grad} \frac{1}{\mu} = \frac{d}{d\mu} \left(\frac{1}{\mu} \right) \operatorname{grad} \mu = - \frac{\nabla \mu}{\mu^2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{\delta} + \mu_0 \left\{ - \frac{1}{\mu_0} \frac{[\vec{B}, \nabla \mu]}{\mu} \right\}. \quad (3.9)$$

С учетом того, что ϵ — функция координат, теорема Гаусса $\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \rho$ запишется так:

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 [\epsilon \operatorname{div} \vec{E} + (\vec{E}, \operatorname{grad} \epsilon)] = \rho$$

или

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ - \epsilon_0 \frac{(\vec{E}, \nabla \epsilon)}{\epsilon} \right\}. \quad (3.10)$$

В свою очередь

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.11)$$

Поле векторов $\vec{B}$ и $\vec{E}$ в вакууме описывается системой уравнений (3.9) ÷ (3.11). Из нее следует, что поле создается первичными источниками $\mu \vec{\delta}$ и зарядами ρ/ϵ , а также вторичными источниками — плотностями тока намагнитченности

$$\vec{\delta}_n(Q, t) = - \frac{1}{\mu_0} \frac{[\vec{B}(Q, t), \nabla_Q \mu]}{\mu_Q} \quad (3.12)$$

и объемными зарядами поляризации плотностью

$$\rho_n(Q, t) = -\epsilon_0 \left(\frac{\vec{E}(Q, t) \cdot \nabla_Q \epsilon}{\epsilon_Q} \right). \quad (3.13)$$

Здесь Q — произвольная точка наблюдения; t — время.

Запишем теперь систему уравнений Максвелла через векторы $\vec{D}$ и $\vec{H}$ (исключив $\vec{B}$ и $\vec{E}$):

$$\text{rot } \vec{D} = -\epsilon_0 \epsilon_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon_0 \left\{ -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{[\vec{D}, \nabla \epsilon]}{\epsilon} \right\}, \quad (3.14)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}, \quad (3.15)$$

$$\text{div } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \left\{ -\mu_0 \frac{[\vec{H}, \nabla \mu]}{\mu} \right\}. \quad (3.16)$$

Система (3.14 ÷ 3.16) свидетельствует о том, что поле векторов $\vec{D}$ и $\vec{H}$ в вакууме создается системой первичных источников — плотностей токов проводимости $\vec{\delta}$ и объемных зарядов ρ и системой вторичных источников — плотностями фиктивных магнитных токов:

$$\vec{\delta}_m(Q, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{[\vec{D}(Q, t), \nabla_Q \epsilon]}{\epsilon_Q} \quad (3.17)$$

и фиктивных магнитных зарядов:

$$\rho_m(Q, t) = -\mu_0 \frac{(\vec{H}(Q, t), \nabla_Q \mu)}{\mu_Q}. \quad (3.18)$$

Поскольку свободных магнитных зарядов не существует, то

$$\int_V \rho_m(Q, t) dV + \oint_S \sigma_m(Q, t) dS = 0. \quad (3.19)$$

Если расчет магнитного поля постоянного тока в кусочно-неоднородной среде вести с использованием вторичных источников второго типа, т. е. фиктивных магнитных зарядов $\rho_m(Q, t)$ и поверхностной плотности токов на поверхностях ферромагнитных тел $\vec{\delta}_m(Q, t)$, то, выразив $\vec{H}(Q, t)$ через первичные и вторичные источники и подставив ее в формулы

$$\sigma_m(Q, t) = 2\mu_0 \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} (\vec{H}(Q, t), \vec{n}(Q)) = 2\mu_0 \lambda_m (\vec{H}(Q, t), \vec{n}(Q)) \quad (3.20)$$

и в формулу (3.18), получим два следующих интегральных уравнения относительно σ_m и ρ_m (в статическом поле σ_m и ρ_m будут функциями только Q):

$$\begin{aligned} \sigma_m(Q) + \oint_{S_\Phi} \sigma_m(M) \lambda(Q) \frac{(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{2\pi r_{QM}^3} dS_M + \int_{V_\Phi} \rho_m(M) \lambda(Q) \frac{(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{2\pi r_{QM}^3} dV_M = \\ = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_D \vec{\delta}(N) \lambda(Q) \frac{[\vec{r}_{QN}, \vec{n}_Q]}{r_{QN}^3} dV_N. \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \rho_m(Q) - \int_{V_\Phi} \rho_m(M) \frac{(\vec{r}_{QM}, \nabla_Q \mu)}{4\pi \mu(Q) r_{QM}^3} dV_M - \oint_{S_\Phi} \sigma_m(M) \frac{(\vec{r}_{QM}, \nabla_Q \mu)}{4\pi \mu(Q) r_{QM}^3} dS_M = \\ = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \vec{\delta}(N) \frac{[\nabla_Q \mu, \vec{r}_{QN}]}{\mu(Q) r_{QN}^3} dV_N, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где S_Φ — поверхность; V_Φ — объем ферромагнетика; D — объем, занятый токами проводимости δ ; $\vec{n}_Q$ — единичная нормаль к поверхности в точке Q .

Систему уравнений (3.21—3.22) решают совместно с уравнением (3.19) либо прямым, либо итерационным методом. Методику решения и программы для ЭВМ см. в [16].

ПРИЛОЖЕНИЕ И

МЕТОД КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (ОТОБРАЖЕНИЙ)

Метод конформных преобразований — это метод анализа и расчета неизменных во времени двумерных электрических и магнитных полей, удовлетворяющих уравнению Лапласа, основу которого составляет конформное преобразование совокупности точек одной плоскости комплексного переменного в совокупность точек другой плоскости.

§ И.1. Комплексный потенциал. Расположим оси декартовой системы в исследуемом поле так, что ось z будет перпендикулярна полю. Плоскость xoy будем называть плоскостью z . Каждая точка поля имеет некоторые координаты x и y . Плоскость xoy можно считать комплексной плоскостью. Тогда положение точки на плоскости будет характеризоваться комплексным числом $z = x + jy$.

Совокупность точек x, y , принадлежащих эквипотенциальной линии, обозначим $U(x, y) = U$, а совокупность точек, принадлежащих силовой линии, назовем $V(x, y) = V$. Из § 19.5 известно, что в любой точке поля силовые и эквипотенциальные линии взаимно перпендикулярны, т. е. отрезок линии U и отрезок линии V в любой точке поля взаимно перпендикулярны. Следовательно, одну из функций, например U , можно принять в качестве действительной, а другую, например V , — в качестве мнимой части некоторого комплексного числа $w = U + jV$.

Функцию w называют *комплексным потенциалом*. Он описывает совокупность силовых и эквипотенциальных линий поля, т. е. ортогональную сетку или картину поля. Функцию U называют *потенциальной функцией*, а V — функцией потока (так как через нее может быть найден поток вектора, характеризующего это поле).

Функциям U и V можно придать и противоположный смысл, т. е. U считать функцией потока, а V — потенциальной функцией. Если считать U потенциальной функцией, то проекции вектора напряженности электрического поля $\vec{E} = iE_x + jE_y$ на оси x и y соответственно равны:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (\text{И.1})$$

[ср. с формулами (19.8)].

Отсюда следует, что модуль напряженности поля $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \left| \frac{dw}{dz} \right|$.

Аналогичные формулы можно записать и для магнитного поля.

§ И.2. Конформные преобразования. *Конформными* называют преобразования совокупности точек плоскости $z = x + jy$ в совокупность точек плоскости $w = U + jV$, осуществляемых с помощью аналитической функции $w = f(z)$.

Функцию $w = U + jV = f(x + jy) = f(z)$ называют *аналитической*, если производная $\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ не зависит от направления, вдоль которого взято приращение Δz , т. е. производная $\frac{dw}{dz}$ аналитической функции должна быть одна и та же,

если приращение dz один раз взять вдоль оси x ($dz = dx$), а другой раз — вдоль оси y ($dz = jdy$). Так, когда приращение Δz взято вдоль оси x , приращение функции $\Delta_x w = \Delta_x U + j\Delta_x V$. Если же приращение Δz взять вдоль оси y , то приращение функции $\Delta_y w = \Delta_y U + j\Delta_y V$.

Учитывая сказанное, имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial x}; \quad (\text{И.2})$$

$$-j \frac{\partial w}{\partial y} = -j \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (\text{И.3})$$

Приравнивая правые части (И.2) и (И.3), получим уравнения, называемые *уравнениями Коши — Римана*:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad (\text{И.4})$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (\text{И.5})$$

Можно доказать, что функции U и V удовлетворяют уравнению Лапласа. Чтобы убедиться в том, что функция U удовлетворяет уравнению Лапласа, продифференцируем (И.4) по x , а (И.5) — по y :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}.$$

Если сложить эти равенства, то получим уравнение Лапласа относительно U . Аналогичное доказательство можно провести и по отношению к функции V .

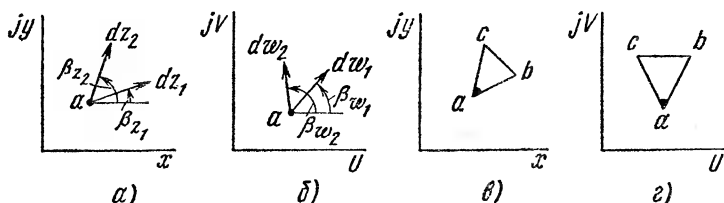


Рис. И.1

Если в произвольной точке a плоскости z (рис. И.1, а) взять два приращения: $dz_1 = |dz_1| e^{j\beta_{z1}}$ и $dz_2 = |dz_2| e^{j\beta_{z2}}$, то в точке a плоскости w (каждой точке плоскости z соответствует некоторая точка в плоскости w , рис. И.1, б) им будут соответствовать приращения $dw_1 = |dw_1| e^{j\beta_{w1}}$ и $dw_2 = |dw_2| e^{j\beta_{w2}}$. В силу аналитичности функции w :

$$\frac{\partial w}{\partial z} \text{ при } dz = dz_1 = \frac{\partial w}{\partial z} \text{ при } dz = dz_2.$$

Поэтому

$$\frac{|dw_1|}{|dz_1|} e^{j(\beta_{w1} - \beta_{z1})} = \frac{|dw_2|}{|dz_2|} e^{j(\beta_{w2} - \beta_{z2})}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|dw_1|}{|dz_1|} = \frac{|dw_2|}{|dz_2|} \text{ и } \beta_{w2} - \beta_{w1} = \beta_{z2} - \beta_{z1},$$

т. е. бесконечно малой фигуре на плоскости z (рис. И.1, в) соответствует подобная бесконечно малая фигура на плоскости w (рис. И.1, г).

По определению, напряжение между двумя близлежащими точками на плоскости z равно $E_z dz \cos(\vec{E}_z, \vec{dz}) = \text{Re } \vec{E}_z^* dz$. Между одноименными точками на плос-

скости ω $\text{Re } \vec{E}_w d\omega$. Эти напряжения равны $\text{Re } \vec{E}_z dz = \text{Re } \vec{E}_w d\omega$. Усилим это равенство $\vec{E}_z dz = \vec{E}_w d\omega$. Отсюда $\vec{E}_z = \vec{E}_w \left(\frac{d\omega}{dz} \right)^*$. Составим выражения для $\left(\frac{d\omega}{dz} \right)^*$ и $\vec{E}_w$ в декартовой системе координат, отсчитывая углы от осей x и U , расположив их параллельно. Когда U — потенциальная функция, то, используя (И.4) и (И.5), имеем

$$\left(\frac{d\omega}{dz} \right)^* = \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial U}{\partial y} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2} e^{j \arctg \frac{\partial U / \partial y}{\partial U / \partial x}},$$

и так как напряженность направлена от более высокого потенциала к более низкому, то $\vec{E}_w = E_w e^{j180^\circ}$. Если V — потенциальная функция, то $\vec{E}_w = E_w e^{-j90^\circ}$ и $\left(\frac{d\omega}{dz} \right)^* = \frac{\partial V}{\partial y} - j \frac{\partial V}{\partial x} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2} e^{j \arctg \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) / \frac{\partial V}{\partial y}}$.

§ И.3. Прямая и обратная задачи расчета полей по методу конформных преобразований. Прямая задача формулируется следующим образом. Известны эквипотенциальные линии плоскости z (обычно известны две линии в соответствии с тем, что поле создается двумя электродами — поверхность каждого электрода является эквипотенциальной). Требуется найти такую функцию $\omega = f(z)$, действительная U или мнимая V часть которой удовлетворяла бы уравнению $U(x, y) = \text{const}$ [или соответственно уравнению $V(x, y) = \text{const}$] на поверхности каждого электрода*.

Если такая функция будет найдена, то на основании теоремы единственности она будет правильно описывать поле во всех его точках.

Очертания электродов в плоскости z могут быть самыми различными. Если очертания электродов таковы, что их можно представить кусочно-ломаными прямыми, то задачу нахождения функции $\omega = f(z)$ можно решить в общем виде (по крайней мере принципиально) с помощью интеграла Кристоффеля — Шварца (см. § И.5). Если же очертания электродов в плоскости z таковы, что не могут быть представлены кусочно-ломаными прямыми, то общий метод нахождения функции $\omega = f(z)$ для таких задач в настоящее время не известен. Тем не менее метод конформных отображений часто стремятся применить и в этом случае, решая задачу обходным путем — просматривают уже известные решения, имеющиеся в учебной и специальной литературе, и пытаются найти такое, в котором форма двух эквипотенциалей, если не полностью, совпадает с формой (очертаниями) электродов исследуемого поля, то достаточно близка к ним. Это решение и принимают в качестве искомого.

Обратная задача формулируется так. Задана некоторая аналитическая функция $\omega = f(z)$. Требуется выяснить, взаимное конформное преобразование каких полей может быть осуществлено с помощью этой функции. В качестве примера обратной задачи рассмотрим преобразование, осуществляемое функцией

$$\omega = m \text{ Arch } \frac{z}{k}, \quad (\text{И.6})$$

где m и k — некоторые числовые коэффициенты.

Разрешив (И.6) относительно z , будем иметь

$$z = x + jy = k \text{ ch } \frac{U + jV}{m} = k \text{ ch } \frac{U}{m} \cos \frac{V}{m} + jk \text{ sh } \frac{U}{m} \sin \frac{V}{m}.$$

Следовательно,

$$x = k \text{ ch } \frac{U}{m} \cos \frac{V}{m}; \quad (\text{И.7})$$

$$y = k \text{ sh } \frac{U}{m} \sin \frac{V}{m}. \quad (\text{И.8})$$

* Отметим, что ортогональная сетка на плоскости ω может быть описана не только в декартовой, но и в полярной системе координат. В полярной системе $\omega = re^{j\beta}$ и линии $r = \text{const}$ могут быть приняты за силовые линии, а линии $\beta = \text{const}$ — за эквипотенциалы. Полярная сетка использована в § И.4 — И.6.

Разделим уравнение (И.7) на $k \operatorname{ch} \frac{U}{m}$ и уравнение (И.8) на $k \operatorname{sh} \frac{U}{m}$; возведем полученные уравнения в квадрат и сложим. Получим уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{k^2 \operatorname{ch}^2 \frac{U}{m}} + \frac{y^2}{k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{U}{m}} = 1. \quad (\text{И.9})$$

Полуоси его

$$a = k \operatorname{ch} \frac{U}{m}, \quad b = k \operatorname{sh} \frac{U}{m}.$$

Из (И.9) следует, что различным $U = \text{const}$ соответствует семейство конфокальных эллипсов с фокусным расстоянием от центра $k = \sqrt{a^2 - b^2}$.

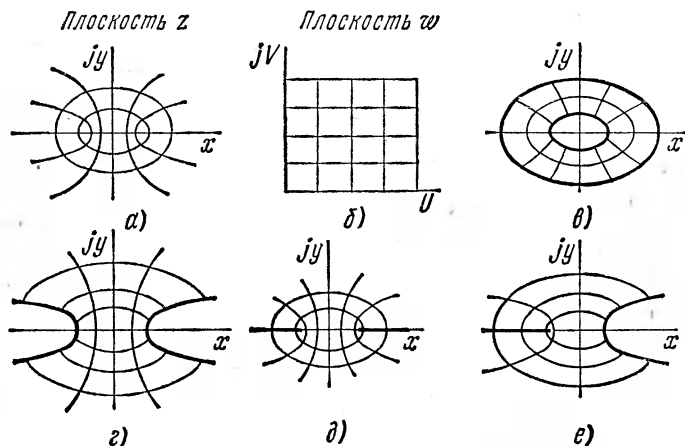


Рис. И.2

Разделив уравнение (И.7) на $k \cos \frac{V}{m}$ и уравнение (И.8) на $k \sin \frac{V}{m}$, а затем возведя их в квадрат и вычтя одно из другого, получим уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{k^2 \cos^2 \frac{V}{m}} - \frac{y^2}{k^2 \sin^2 \frac{V}{m}} = 1 \quad (\text{И.10})$$

с полуосями $a_1 = k \cos \frac{V}{m}$, $b_1 = k \sin \frac{V}{m}$.

Уравнение (И.10) при $V = \text{const}$ описывает семейство конфокальных гипербол с фокусным расстоянием $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = k$.

Таким образом, функция $w = m \operatorname{Arsh} \frac{z}{k}$ конформно преобразует совокупность взаимно перпендикулярных эллипсов и гипербол на плоскости z (рис. И.2, а) в совокупность взаимно перпендикулярных прямых на плоскости w (рис. И.2, б).

В § И.2 говорилось, что роль потенциальной функции может выполнять либо функция U , либо функция V .

Если в рассматриваемом случае под потенциальной функцией понимать функцию U , то эквипотенциальные поверхности будут эллипсами, а поле на плоскости z будет представлять собой поле между двумя конфокальными эллиптическими электродами (рис. И.2, в).

Если же под потенциальной функцией в рассматриваемом примере понимать функцию V , то поле на плоскости z будет являться полем между двумя электродами гиперболической формы (рис. И.2, $з$).

В предельном случае, когда полуось $b_1 = 0$, гипербола вырождается в прямую (рис. И.2, $д$) и исследуемое поле представляет собой поле между двумя плоскими пластинками.

Электроды могут иметь и неодинаковую форму, например левый электрод — форму плоской пластинки, а правый — форму гиперболы (рис. И.2, $е$). Постоянные m и k определяют из граничных условий.

§ И.4. Преобразование равномерного поля на плоскости z в поле верхней полуплоскости w . Координату некоторой точки на плоскости w запишем в полярной системе координат: $w = r e^{i\beta}$ (обозначения см. на рис. И.3, $б$). Свяжем переменные z и w соотношением $z = x + jy = A \ln \frac{w}{r_0}$. Здесь A и r_0 — некоторые постоянные.

Тогда $x = A \ln \frac{r}{r_0}$ и $y = A\beta$.

На плоскости z (рис. И.3, $а$) имеется равномерное поле, образованное двумя плоскими электродами. Один электрод совпадает с осью x и имеет потенциал $\varphi_1 = 0$, второй удален от оси x на расстояние d и имеет потенциал φ_2 . На плоскости z эквипотенциали являются прямыми, параллельными оси x , а силовые линии параллельны оси y .

На плоскости w при использовании полярной системы координат линии равного потенциала будут соответствовать линиям $A\beta = \text{const}$, т. е. будут являться лучами, проведенными из начала координат, а эквипотенциали $A \ln \frac{r}{r_0} = \text{const}$ будут являться окружностями.

Положим, что эквипотенциаль $y = d$ плоскости z отображена на плоскости w отрицательной полуосью $-U$, а эквипотенциаль $y = 0$ — положительной полуосью $+U$. Точке $w = 0$ соответствует $x = -\infty$. Определим постоянную A . Полупрямой $-U$ соответствует $\beta = \pi$, поэтому $y = d = A\pi$. Отсюда $A = d/\pi$.

Найдем соответствие между силовыми линиями в плоскости z и в плоскости w . Силовой линии $x = 0 = \frac{d}{\pi} \ln \frac{r}{r_0}$ соответствует полуокружность радиусом $r = r_0$ (r_0 произвольный радиус, играющий роль единицы измерения).

Силовой линии $x = b = \frac{d}{\pi} \ln \frac{r}{r_0}$ отвечает полуокружность радиусом $r = r_0 e^{\frac{b\pi}{d}}$.

Силовой линии $x = 2b$ отвечает полуокружность $r = r_0 e^{\frac{2b\pi}{d}}$ и т. д.

Таким образом, поле в верхней полуплоскости w , конформно отображающее равномерное поле на плоскости z , образовано двумя полупрямыми, совпадающими с осью $+U$ и $-U$, которые отделены друг от друга в точке $w = 0$ и разность потенциалов между которыми φ_2 .

§ И.5. Интеграл Кристоффеля — Шварца. Поле на плоскости z , образованное между осью x и ломаной линией $z_0 - z_1 - z_2 - \dots - z_n$ с конечным числом изломов (рис. И.4, $а$) (расположены по часовой стрелке), может быть отображено на верхнюю полуплоскость w с помощью преобразования Кристоффеля — Шварца:

$$dz = A (w - U_1)^{-\alpha_1} (w - U_2)^{-\alpha_2} \dots (w - U_n)^{-\alpha_n} e^{j\pi} dw. \quad (\text{И.11})$$

Здесь A — некоторая постоянная; $U_1, U_2, \dots, U_n$ — произвольно выбранные точки на оси U (рис. И.4, $б$), соответствующие одноименным точкам $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Оси x и U расположим параллельно. Исходной точке z_0 отвечает некоторая точка U_0 на оси U . Углы α и γ в формуле (И.11) измеряются в долях от π . Угол α положителен, если при переходе от предшествующего участка к последующему совершается поворот против часовой стрелки. Так, для рис. И.4, $\alpha_1 > 0$, но $\alpha_2 < 0$. Угол γ отсчитывается от оси $+x$ до отрезка $z_0 - z_1$. Линия $z_0 - z_1 - \dots - z_n$ представляет собой след электрода, поэтому она является эквипотенциальной. В более общем случае перемещение производят по следу электрода, по выбранной силовой линии и по следу второго электрода или эквипотенциальной линии. Этому перемещению соответствует перемещение вдоль линии U плоскости w^* . При обходе по контуру на плоскости z надо следить за тем, чтобы область, занятая полем, располагалась слева.

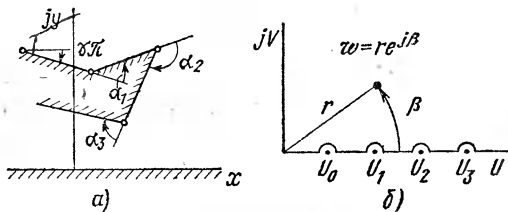


Рис. И.4

Биномы $(w - U_k)^{-\alpha_k}$ учитывают, что модуль $\vec{E}_z$ изменяется на каждом линейном участке, но аргумент $\vec{E}_z$ на каждом участке остается неизменным. При переходе через точку излома z_k аргумент $\vec{E}_z$ (он пропорционален $\arg \frac{dw}{dz}$) скачком изменяется на угол α_k , поскольку при переходе через точку U_k бином $(w - U_k)$ изменяет знак. В формуле (И.11) граничные условия в поле учтены правильным изменением аргумента $\frac{dw}{dz}$ на всей границе области. Интегрируя (И.11), получим формулу (И.12), которую называют *интегралом Кристоффеля — Шварца* (C_1 и C_2 — постоянные):

$$z = A \int (w - U_1)^{-\alpha_1} (w - U_2)^{-\alpha_2} \dots (w - U_n)^{-\alpha_n} e^{j\gamma\pi} dw + C_1 + jC_2. \quad (\text{И.12})$$

§ И.6. Применение интеграла Кристоффеля — Шварца. Рассмотрим картину поля на краю плоского конденсатора рис. И.5, а. Оси координат плоскости z расположим так, что ось x совпадает со средней линией конденсатора (потенциал ее

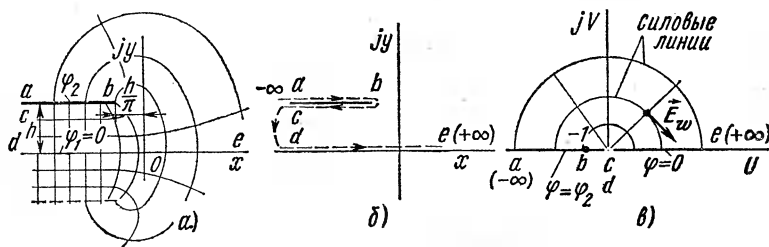


Рис. И.5

примем равным нулю). Верхний электрод, будучи параллелен оси x , удален от нее на расстояние h , простирается от точки b до $-\infty$ и имеет потенциал φ_2 . Пунктиром показан нижний электрод.

Ломаной линией $z_0 - z_1 - z_2 - \dots - z_n$ (рис. И.5, б) в данном случае является линия, состоящая из трех участков. Первый идет по верхней части электрода из точки a (из $-\infty$) до точки b . Участок расположен параллельно оси x , поэтому $\gamma = 0$. Второй участок от точки b до точки c (до $-\infty$) по нижней части электрода.

* Для полярной системы координат $U = \text{const}$ не является уравнением эквипотенциали.

Угол $\alpha_1 = -1$. Третий участок от точки $c (-\infty)$ вдоль положительного направления оси x до точки e , находящейся в $+\infty$. Так как при переходе от второго участка к третьему совершается поворот по часовой стрелке, то $\alpha_2 = +1$.

Линию ab плоскости z отобразим на отрицательную полуось $-U$ плоскости w так (рис. И.5, б), чтобы точка a находилась в точке $U = -\infty$; точка b — в точке $U = -r_0 = -1$; точки c и d — в точке $U = 0$ и точка e — в $U = +\infty$. Тогда в соответствии с формулой (И.11)

$$dz = A (w + 1)^1 (w - 0)^{-1} dw \quad (\text{а})$$

и

$$z = x + jy = A \int (w + 1) w^{-1} dw + C_1 + jC_2,$$

или

$$z = A \left(w + r_0 \ln \frac{w}{r_0} \right) + C_1 + jC_2. \quad (\text{б})$$

На плоскости w будем пользоваться полярной системой координат $w = re^{j\beta}$. Разделяя действительные и мнимые части, найдем:

$$x = A \left(r \cos \beta + r_0 \ln \frac{r}{r_0} \right) + C_1, \quad (\text{И.13})$$

$$y = A (r \sin \beta + r_0 \beta) + C_2. \quad (\text{И.14})$$

Определим постоянные A , C_1 и C_2 .

Постоянную C_2 найдем из условия, что для участка de плоскости z имеем $y = 0$ и что ему на плоскости w соответствует $\beta = 0$. Подставляя $\beta = 0$ и $y = 0$ в (И.14), находим $C_2 = 0$.

Для нахождения A учтем что для участка ab плоскости z $y = h$, а на плоскости w этому участку соответствует $\beta = \pi$. Подставляя эти данные в (И.14), определим $A = h/\pi$.

Подставляя данные, соответствующие точке b ($x = -\frac{h}{\pi}$, $\beta = \pi$), в уравнение (И.13), найдем $C_1 = 0$. Учитывая, что $r_0 = 1$, перепишем (И.13) и (И.14):

$$x = \frac{h}{\pi} \left(r \cos \beta + \ln \frac{r}{r_0} \right), \quad (\text{И.15})$$

$$y = \frac{h}{\pi} (r \sin \beta + \beta). \quad (\text{И.16})$$

Эквипотенциалами на плоскости w являются прямые $\beta = \text{const}$. Для построения на плоскости z эквипотенциала $\varphi = \text{const}$ ($\varphi_2 > \varphi > 0$) поступаем следующим образом. Находим угол $\beta = \frac{\varphi}{\varphi_2} \pi$, подставляем найденное β в формулы (И.15) и (И.16)

и, придавая $\frac{r}{r_0}$ различные значения, находим координаты x и y точек искомого эквипотенциала. Для построения силовой линии в формулах (И.15) и (И.16) следует положить $r = \text{const}$ и изменять β от 0 до π . Определяем напряженность поля $\vec{E}_w$ на плоскости w , исходя из того, что $\pi r E_w = \varphi_2$. Так как $\vec{E}_w$ перпендикулярна эквипотенциальной линии, проведенной под углом β к оси $+U$, то $\vec{E}_w$ с осью $+U$ составляет угол $\beta - \frac{\pi}{2}$.

Таким образом,

$$\vec{E}_w = \frac{\varphi_2}{\pi r} e^{j(\beta - \frac{\pi}{2})}. \quad (\text{И.17})$$

Напряжение между какими-то двумя бесконечно близко расположенными друг к другу точками плоскости z и между соответствующими им точками плоскости w одинаково и равно $\vec{E}_z dz = \vec{E}_w dw$.

Здесь $\vec{E}_z$ — напряженность поля на плоскости z . Отсюда $\vec{E}_z = \vec{E}_w \left(\frac{dw}{dz} \right)^*$.

Подставляя значение $\vec{E}_w$ из (И.17), производной $\frac{dw}{dz}$ из (б) и значение $A = \hbar/\pi$, найдем $\vec{E}_z = -j \frac{\Phi_2}{r\hbar} \left(\frac{w}{r_0 + w} \right)^* e^{j\beta}$.

Применим интеграл Кристоффеля — Шварца к расчету поля, образованного линейным зарядом, находящимся в точке A на оси x плоскости z (рис. И.6, а), заряженной полоской на отрезке $C-D$ и диполя в окрестности точки F . Характер изменения $\frac{dz}{dw}$ при перемещении по оси U плоскости w такой:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{w-b}{(w-a)\sqrt{(w-c)(w-d)(w-f)^2}}. \quad (\text{И.18})$$

Точки a, b, c, d, f оси U плоскости w соответствуют точкам A, B, C, D, F оси x плоскости z . Поясним формулу (И.18). При переходе через точку A напряженность $\vec{E}_z$,

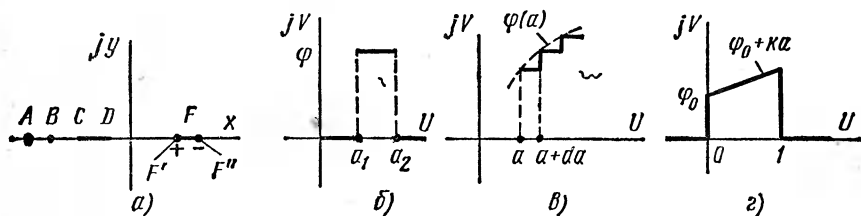


Рис. И.6

принимая бесконечно большое значение в точке A , скачком изменяет направление на 180° . Такой характер изменения $\vec{E}_z$ создает множитель $\frac{1}{w-a}$ в формуле (И.18).

В точках C и D аргумент $\vec{E}_z$ изменяется на 90° . Это учтено наличием в формуле (И.18)

множителя $\{(w-c)(w-d)\}^{-\frac{1}{2}}$. В некоторой точке B оси x плоскости z $\vec{E}_z = 0$. Это учтено множителем $(w-b)$ в числителе (И.18). В окрестности точки F , где расположен диполь, характер изменения $\vec{E}_z$ получим предельным переходом, устремив точки F' и F'' к точке F , при этом в формуле (И.18) появляется множитель $\frac{1}{(w-f)^2}$.

Интегрируя (И.18), получим $z = f(w)$, а затем найдем и $w = f_1(z)$.

§ И.7. Интеграл Шварца. Положим, что на некотором участке границы исследуемой области поля на оси x плоскости z в интервале значений x от A_1 до A_2 потенциал равен Φ , а вне этого отрезка $\Phi = 0$. Упомянутым точкам на оси U плоскости w соответствуют точки a_1 и a_2 (рис. И.6, б). При переходе через эти точки скачком изменяется направление напряженности поля, скачком должна измениться и величина $\frac{dz}{dw}$. В соответствии с этим $\frac{dz}{dw} = \frac{M}{(w-a_1)(w-a_2)} = N \left(\frac{1}{w-a_2} - \frac{1}{w-a_1} \right)$, здесь $N = (a_2 - a_1) M$. Следовательно,

$$z = N \ln \frac{w-a_2}{w-a_1} + jC, \quad (\text{И.19})$$

где jC — некоторая постоянная.

При $w < a_1$ и $w > a_2$ $z = x + jy = x + j0$. Дробь под знаком логарифма положительна, поэтому $C = 0$. При переходе через точку a_1 под знаком логарифма в (И.19) оказывается отрицательное число, поэтому

$$z = x + jy = N \ln \left| \frac{w - a_1}{w - a_2} \right| + j\pi N.$$

Приращение аргумента комплексного потенциала w при переходе через точку a_1 равно $V = \varphi$. Но при этом приращение аргумента w должно быть равно приращению аргумента z (см. § И.2), поэтому $\pi N = \varphi$, $N = \varphi/\pi$ и $z = \frac{\varphi}{\pi} \ln \frac{w - a_2}{w - a_1}$.

Если потенциал φ вдоль оси U плоскости w будет изменяться плавно, то, заменив U на переменную интегрирования a , сначала представим плавную кривую в виде ступенчатой, как это показано на рис. И.6, в, и составим приращение потенциала на бесконечно малом отрезке da оси U плоскости w :

$$dz = \frac{\varphi(a)}{\pi} \ln \frac{w - (a + da)}{w - a} = \frac{\varphi(a)}{\pi} \ln \left(1 + \frac{da}{a - w} \right).$$

Разложим логарифм в ряд и, учитывая, что $\frac{da}{a - w} \ll 1$, возьмем лишь первый член этого ряда

$$dz = \frac{\varphi(a)}{\pi} \cdot \frac{da}{a - w}.$$

Комплексный потенциал z получим, просуммировав приращения dz от всех скачков потенциала на отрезках da , т. е. осуществив интегрирование:

$$z = \frac{1}{\pi} \int \varphi(a) \frac{da}{a - w}. \quad (\text{И.20})$$

В качестве примера составим $z = f(w)$ для поля, образованного границей магнитопровода трансформатора с потенциалом $\varphi = 0$ (отрезок $-\infty, 0$ оси U плоскости w) и высоковольтной обмоткой на участке $0 - 1$, потенциал которой линейно нарастает по закону $\varphi_0 + ka$ — рис. И.6, г. В этом случае

$$z = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_0 + ka}{a - w} da = \frac{1}{\pi} (\varphi_0 + kw) \ln \frac{w - 1}{w} + \frac{k}{\pi}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ К

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И СТАНОВЛЕНИЯ КУРСА ТОЭ

Термин электричество был введен в первом трактате об электрических и магнитных явлениях, составленном в 1600 г. английским ученым Гильбертом. В этом трактате электрические явления рассматривались вне связи с магнитными. На их взаимную связь впервые было указано русским академиком Ф. Эпинусом в 1758 г. в его докладе в Академии наук на тему «Речь о родстве электрической силы и магнетизма».

По предложению М. В. Ломоносова, Академия наук выдвинула конкурсную тему на 1755 г. «ссыскать подлинную электрической силы причину и составить точную ее теорию». М. В. Ломоносов дал объяснение атмосферного электричества, предложил громоотвод и высказал мысль, что опыты с электричеством «великую надежду к благополучию человеческого показывают».

Закон Кулона был сформулирован в 1785 г. Понятие электрической цепи предложено Вольта в 1794 г. Вольтов столб датируют 1800 г. Серия опытов с электрической дугой была предпринята русским академиком В. В. Петровым в 1802 г. Он является также основоположником электрохимии.

Воздействие тока на магнитную стрелку изучалось датчанином Х. Эрстедом в 1819 г., а взаимодействие токов — французом А. Ампером в 1820 г. Опытные данные Био и Савара по исследованию магнитных полей были математически обобщены Лапласом в 1820 г. (Закон Био — Савара — Лапласа).

Закон электромагнитной индукции был открыт английским ученым М. Фарадеем в 1831 г. Им же были открыты законы электрохимии.

Электромагнитный телеграф был изобретен русским ученым П. Л. Шиллингом в 1832 г. Русский ученый Б. С. Якоби в 1838 г. построил первую электрическую машину, которая двигала по Неве лодку с 14 пассажирами. Якоби изобрел также гальванопластику.

Закон Ома датирован 1827 г. Закон Джоуля — Ленца 1841 (Джоуль) — 1842 (Ленц). В 1844 г. русский академик Э. Х. Ленц сформулировал закон электромагнитной инерции. Он же исследовал тепловое действие тока.

Законы Кирхгофа (немецкий ученый) датированы 1845 г. Кирхгофом впервые была применена δ -функция. В 1937 г. она была использована Дираком в работах по атомной физике. Векторный потенциал $\vec{A}$ и взаимную индуктивность M ввел немец Ф. Нейман в 1845 г.

Английский ученый Д. К. Максвелл в 1873 г. ввел понятие тока смещения, сформулировал совокупность уравнений переменного электромагнитного поля, носящих его имя.

Движение энергии в упругих средах было теоретически изучено русским ученым Н. А. Умовым в 1874 г.

Первые опыты по передаче электрической энергии мощностью 4,4 кВт постоянным током на расстояние 1 км были проведены русским инженером Ф. А. Пироцким в 1875 г.

В 1882 г. М. Депре передавал электрическую энергию мощностью в 2,2 кВт на расстояние 57 км при напряжении 2 кВ. Эти опыты были высоко оценены Ф. Энгельсом в письме к К. Марксу.

Лампа накаливания («Русский свет») была изобретена А. Н. Лодыгиным в 1875 г. Переменный ток для освещения («Свеча Яблочкова») был применен в 1876 г.

Движение потока энергии в электромагнитном поле изучено англичанином Д. Пойнтингом в 1884 г.

Русский инженер М. О. Доливо-Добровольский к 1889 г. разработал все основные элементы трехфазной системы: трехфазный двигатель, трехфазный генератор и трансформатор и осуществил передачу энергии трехфазным током на расстояние в 175 км.

Русский ученый А. Г. Столетов известен открытием фотоэффекта, исследованием электрического разряда в газах и исследованием свойств ферромагнитных материалов (1872 г.).

Русский ученый А. С. Попов первым в мире осуществил радиосвязь. Экспериментальное доказательство существования электромагнитных волн осуществлено немецким ученым Г. Герцем в 1887—1888 гг. Экспериментальное доказательство наличия светового давления, предсказанного Максвеллом, осуществил в своих опытах проф. Московского университета П. Н. Лебедев в 1895 г. Про него лорд Кельвин в разговоре с К. А. Тимирязевым сказал: «Вы может быть знаете, что я всю жизнь воевал с Максвеллом, не признавая его светового давления, а вот ваш Лебедев заставил меня сдаться перед его опытами». П. Н. Лебедев покинул свою лабораторию в Московском университете в знак протеста против исключения из университета передовых студентов царским министром Кассо в 1911 г.

Цикл работ по исследованию зависимости параметров вещества от частоты был проведен в 1908—1911 гг. русским ученым В. К. Аркадьевым.

Развитие релятивистской электродинамики происходило в основном в 1905—1908 гг. и связано с именами А. Эйнштейна, Г. Лоренца и Г. Минковского. К этому времени электромагнитное поле уже трактовали как самостоятельный вид материи.

В развитии теории распространения радиоволн существенный вклад сделан советским ученым Рожанским в 1922 г. Теоретическое исследование полых волноводов выполнено П. Е. Краснушкиным, Л. И. Мандельштамом и др. После Октябрьской революции в 1920 г. была создана комиссия ГОЭЛРО по разработке плана электрификации РСФСР, рассчитанного на 10—15 лет. Этот план был высоко оценен В. И. Лениным, который назвал его второй программой партии. План предусматри-

вал создание 30 электростанций общей мощностью 1,75 млн. кВт. Насколько увеличилась энерговооруженность СССР можно судить по решениям XXV съезда КПСС. К концу 1980 г. производство электрической энергии в СССР составит 1340—1380 млрд. кВт·ч, будут введены мощности электростанций в размере 67—70 млн. кВт и магистральные линии передач напряжением до 1,15 млн. В.

Приведем сведения о времени появления основополагающих математических и общетеоретических работ, имеющих непосредственное отношение к ТОЭ и до сих пор не упомянутых.

Прямое преобразование Лапласа датируют 1782 г. Теорема свертки впервые дана русским ученым П. Л. Чебышевым в 1867 г. Интеграл Дюамеля (французский ученый) датируют 1883 г. Основы теории устойчивости движения были созданы русским академиком А. М. Ляпуновым в 1892 г. Операторный метод на основе преобразования Хевисайда — Коши был введен в электротехнику английским ученым О. Хевисайдом в 1892—1912 гг. В тот же период Хевисайдом была введена единичная функция. Спектральные представления функций времени — теорему Рейли — датируют 1894 г. Одним из первых, кто применил спектральные представления к электрическим колебаниям, был русский ученый Н. Н. Андреев (1915 г.). Симплицический метод расчета электрических цепей предложен американским ученым Ч. Штейнметцем в 1894 г.

Метод гармонического баланса впервые введен французом М. Жоли в 1911 г. Кусочно-линейный метод интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений был предложен русским ученым Н. Д. Папалекси в 1912 г. Графо-аналитический метод интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений был введен в электротехнику русским инженером В. Волюнкиным в 1916 г.

Первым предложил метод электрических сеток для решения уравнения Лапласа советский ученый С. А. Гершгорин в 1929 г.

Метод медленно меняющихся амплитуд предложил в 1927 г. голландский ученый Б. Ван-дер-Поль. Метод малого параметра — французский ученый Г. Пуанкаре в 1928 г. Поля в поляризуемых и ферромагнитных средах — И. Е. Тамм в 1929 г., а также Л. Д. Ландау и Е. М. Лившиц.

Основополагающие работы по теории нелинейных колебаний выполнили советские ученые А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин к 1937 г. Расчет цепей с нелинейными элементами, имеющими идеально прямоугольные характеристики, предложил В. Кремер в 1938 г.

Частотные методы анализа нелинейных цепей развиты советскими учеными Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым в 1934—1937 гг. Дискретное преобразование Лапласа разработано русским ученым Я. З. Цыпкиным в 1948—1950 гг. Метод трапецидальных частотных характеристик разработал советский ученый В. В. Солодовников в 1950 г.

Применение метода интегральных уравнений к задачам электротехники осуществлено советскими учеными Г. А. Гринбергом в 1948 г., О. В. Тозони в 1964 г. и др.

Приоритет исследования процессов на моделях принадлежит русским ученым А. Н. Крылову, Н. Н. Павловскому и др.

Первые работы по синтезу электрических цепей выполнены Цобелем и Фостером в 1924 г., немцем Кауером в 1927 г., советскими учеными Г. В. Брауде в 1934 г., С. Н. Евлановым в 1937 г. и Б. В. Булгаковым в 1949 г. Первые работы по структурному анализу и теории сигнальных графов выполнены советским ученым Б. Н. Петровым в 1945 г. и американским ученым С. Мезоном в 1953 г.

Теорема В. А. Котельникова о передаче непрерывных сообщений дискретными значениями сформулирована в 1933 г.

Первое исследование комбинационных колебаний в нелинейных цепях, мягкого и жесткого возбуждения выполнено немцем К. Хеегнером в 1924 г. Влияние переменной составляющей магнитного потока на постоянную в нелинейной магнитной цепи обнаружено немцем Шунком в 1923 г., а селективное выпрямление — советским ученым М. А. Розенблатом в 1949 г.

Первым в России учебным заведением электротехнического профиля было основанное в 1886 г. Петербургское техническое училище телеграфных инженеров, которое через пять лет было преобразовано в Петербургский электротехнический институт (ныне ЛЭТИ).

Как самостоятельная дисциплина курс ТОЭ начал формироваться с 1904 г., когда академик В. Ф. Миткевич в Петербургском политехническом институте (ныне

ЛПИ) начал читать курс «Теория электрических и магнитных явлений», а проф. К. А. Круг с 1905 г. в МВТУ — курс «Теория переменных токов».

Первое издание учебника по ТОЭ К. А. Круга датировано 1916 г., последнее — 1946 г. В настоящее время учебники по ТОЭ издаются авторами, работающими в МЭИ, МИРЭА, ЛПИ, МАИ.

Программа курса ТОЭ через каждые 5—7 лет пересматривается и обновляется.

В период с 1915 по 1935 г. курс ТОЭ формировался в основном под влиянием энергетики, связи, светотехники, электромашиностроения. В последующий период — примерно с 1936 г. по 1950 г. — под влиянием развития радиотехники, автоматики и телемеханики. В последующие годы на курс ТОЭ в значительной мере повлияло развитие электроники, вычислительной техники и теории информации.

ПРИЛОЖЕНИЕ Л

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ПРОВОДНИКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

Значения электрической проводимости γ (См/м) при 20° С для различных проводниковых материалов

Алюминий	$(3,47 \div 3,8) 10^7$	Сталь	$(0,73 \div 0,97) 10^7$
Бронза	$(1,92 \div 4,76) 10^7$	Серебро	$(6,17 \div 6,25) 10^7$
Латунь	$(1,26 \div 3,23) 10^7$	Чугун	$(2 \div 2,5) 10^6$
Медь	$(5,5 \div 5,72) 10^7$	Константан	$(1,9 \div 2,22) 10^6$
Никель	$(1,26 \div 1,32) 10^7$	Нихром	$(0,735 \div 0,48) 10^6$

Основные свойства некоторых диэлектриков. В табл. Л.1 даны значения диэлектрической проницаемости ϵ при частоте 100 Гц и 100 МГц, тангенса угла потерь $\operatorname{tg} \delta$ при частоте 1000 Гц и пробивной напряженности (кВ эфф/см) в равномерном поле при частоте 50 Гц.

Т а б л и ц а Л.1

Материал	ϵ		$\operatorname{tg} \delta$	$E_{\text{проб}}$
	100 Гц	100 МГц		
Бакелит	4,9	3,7	0,03	240
Бумага	3,7	—	0,009	160
Кварц	3,8	3,8	0,001	80
Плексиглас	3,4	2,6	0,06	400
Полихлорвинил	3,2	2,8	0,01	320
Полистирол	2,55	2,52	0,0005	240
Слюда	5,4	5,4	0,002	100—1000
Трансформаторное масло	2,24	2,18	0,001	120
Фарфор	7	—	—	57

ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

а. Учебники

1. Ионкин П. А. и др. Теоретические основы электротехники. Т. II. «Высшая школа», 1976.
2. Купалян С. Д. Теоретические основы электротехники. Ч. III. «Энергия», 1970.
3. Нейман Л. Р., Демирчан К. С. Теоретические основы электротехники. Т. II. «Энергия», 1974.
4. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Ч. III. «Энергия», 1974.

б. Учебные пособия и монографии

5. Арцимович Л. А., Лукьянов С. Ю. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. «Наука», 1972.
6. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. «Наука», 1972.
7. Кухаркин Е. С. Основы инженерной электрофизики. Ч. I. «Высшая школа», 1969.
8. Меерович Э. А. Методы релятивистской электродинамики в электротехнике. «Энергия», 1966.
9. Миролюбов Н. Н. и др. Методы расчета электростатических полей. «Высшая школа», 1963.
10. Нейман Л. Р. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. Госэнергоиздат, 1948.
11. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн. «Наука», 1973.
12. Смайт В. Электростатика и электродинамика. ИЛ, 1954.
13. Стреттон Д. А. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, 1948.
14. Тамм И. Е. Основы теории электричества. Гостехиздат, 1956.
15. Тозони О. В. Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах. Техника, 1967.
16. Тозони О. В. Метод вторичных источников в электротехнике. «Энергия», 1975.
17. Шимиони К. Теоретическая электротехника. «Мир», 1964.

в. Задачки

18. Бессонов Л. А. и др. Сборник задач по теоретическим основам электротехники. «Высшая школа», 1975.
19. Колли Я. Н. и др. Задачник по теоретическим основам электротехники (теория поля). «Энергия», 1972.

г. Контрольные задания и методические указания

20. Бессонов Л. А. и др. Контрольные задания и методические указания по курсу ТОЭ. «Высшая школа», 1977.

Часть III

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Предисловие	3
Введение	4

Глава девятнадцатая

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 19.1. Определение электростатического поля	5
§ 19.2. Закон Кулона	5
§ 19.3. Напряженность и потенциал электростатического поля	6
§ 19.4. Электрическое поле — поле потенциальное	8
§ 19.5. Силовые и эквипотенциальные линии	9
§ 19.6. Выражение напряженности в виде градиента потенциала	10
§ 19.7. Дифференциальный оператор Гамильтона (оператор набла)	12
§ 19.8. Выражение градиента потенциала в цилиндрической и сферической системах координат	12
19.9. Поток вектора через элемент поверхности и поток вектора через поверхность.	13
§ 19.10. Свободные и связанные заряды. Поляризация вещества	14
§ 19.11. Вектор поляризации	14
§ 19.12. Вектор электрической индукции $\vec{D}$	16
§ 19.13. Теорема Гаусса в интегральной форме	16
§ 19.14. Применение теоремы Гаусса для определения напряженности и потенциала в поле точечного заряда	18
§ 19.15. Теорема Гаусса в дифференциальной форме	19
§ 19.16. Вывод выражения для $\text{div } \vec{E}$ в декартовой системе координат	21
§ 19.17. Использование оператора набла для записи операции взятия дивергенции	21
§ 19.18. Выражение $\text{div } \vec{E}$ в цилиндрической и сферической системах координат	22
§ 19.19. Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа	22
§ 19.20. Граничные условия	24
§ 19.21. Поле внутри проводящего тела в условиях электростатики	25
§ 19.22. Условия на границе раздела проводящего тела и диэлектрика	25
§ 19.23. Условия на границе раздела двух диэлектриков	26
§ 19.24. Теорема единственности решения	27
§ 19.25. Общая характеристика задач электростатики и методов их решения	28
§ 19.26. Поле заряженной оси	30
§ 19.27. Поле двух параллельных заряженных осей	31
§ 19.28. Поле двухпроводной линии	31

§ 19.29. Емкость	33
§ 19.30. Метод зеркальных изображений	34
§ 19.31. Поле заряженной оси, расположенной вблизи проводящей плоскости	34
§ 19.32. Поле заряженной оси, расположенной вблизи плоской границы раздела двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями	35
§ 19.33. Электростатическое поле системы заряженных тел, расположенных вблизи проводящей плоскости	37
§ 19.34. Потенциальные коэффициенты. Первая группа формул Максвелла	38
§ 19.35. Емкостные коэффициенты. Вторая группа формул Максвелла	39
§ 19.36. Частичные емкости. Третья группа формул Максвелла	40
§ 19.37. Поле точечного заряда, расположенного вблизи проводящей сферы	42
§ 19.38. Поле заряженной оси, расположенной параллельно цилиндру	43
§ 19.39. Шар в равномерном поле	43
§ 19.40. Проводящий шар в равномерном поле	47
§ 19.41. Диэлектрический шар в равномерном поле	48
§ 19.42. Диэлектрический цилиндр в равномерном поле	50
§ 19.43. Понятие о плоскопараллельном, плоскомеридианном и равномерном полях	51
§ 19.44. Графическое построение картины плоскопараллельного поля	52
§ 19.45. Графическое построение картины плоскомеридианного поля	53
§ 19.46. Объемная плотность энергии электрического поля и выражение механической силы в виде производной от энергии электрического поля по изменяющейся координате	54
§ 19.47. Энергия поля системы заряженных тел	56
§ 19.48. Метод средних потенциалов	64
§ 19.49. О расчете электрических полей, создаваемых диэлектриками, сохраняющими остаточную поляризацию при снятии внешнего поля	68
Вопросы для самопроверки	68

Глава двадцатая

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

§ 20.1. Плотность тока и ток	69
§ 20.2. Закон Ома и второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме	69
§ 20.3. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме	72
§ 20.4. Дифференциальная форма закона Джоуля — Ленца	73
§ 20.5. Уравнение Лапласа для электрического поля в проводящей среде	73
§ 20.6. Переход тока из среды с проводимостью γ_1 в среду с проводимостью γ_2 . Граничные условия	73
§ 20.7. Аналогия между полем в проводящей среде и электростатическим полем	74
§ 20.8. Экспериментальное исследование полей	75
§ 20.9. Соотношение между проводимостью и емкостью	76
§ 20.10. Общая характеристика задач расчета электрического поля в проводящей среде и методов их решения	78
§ 20.11. Расчет электрического поля в диэлектрике, окружающем проводники с токами.	78
Вопросы для самопроверки	81

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 21.1.	Связь основных величин, характеризующих магнитное поле. Механические силы в магнитном поле	81
§ 21.2.	Интегральная форма закона полного тока	84
§ 21.3.	Дифференциальная форма закона полного тока	84
§ 21.4.	Раскрытие выражения $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$ в декартовой системе координат	85
§ 21.5.	Запись ротора в виде векторного произведения	87
§ 21.6.	Раскрытие $\operatorname{rot} \vec{H}$ в виде определителя в декартовой системе	87
§ 21.7.	Выражение проекций ротора в цилиндрической и сферической системах координат	87
21.8.	Принцип непрерывности магнитного потока и запись его в дифференциальной форме	88
§ 21.9.	Магнитное поле в областях, «занятых» и «незанятым» постоянным током	88
§ 21.10.	Скалярный потенциал магнитного поля	88
§ 21.11.	Граничные условия	90
§ 21.12.	Векторный потенциал магнитного поля	91
§ 21.13.	Уравнение Пуассона для вектора-потенциала	92
§ 21.14.	Выражение магнитного потока через циркуляцию вектора-потенциала	93
§ 21.15.	Векторный потенциал элемента тока	95
§ 21.16.	Взаимное соответствие электростатического (электрического) и магнитного полей	96
§ 21.17.	Задачи расчета магнитных полей	97
§ 21.18.	Общая характеристика методов расчета и исследования магнитных полей	97
§ 21.19.	Опытное исследование картины магнитного поля	98
§ 21.20.	Графическое построение картины поля и определение по ней магнитного сопротивления	99
§ 21.21.	Магнитное экранирование	101
§ 21.22.	Эллипсоид во внешнем однородном поле. Коэффициент размагничивания	103
§ 21.23.	Применение метода зеркальных изображений	104
§ 21.24.	Закон Био — Савара — Лапласа	110
§ 21.25.	Определение скалярного магнитного потенциала контура с током через телесный угол	113
§ 21.26.	Магнитное поле намагниченной пленки (ленты)	113
§ 21.27.	Определение магнитного потока, созданного в некотором контуре намагниченным ферромагнитным телом	114
§ 21.28.	Выражение механической силы в виде производной от энергий магнитного поля по координате	115
	Вопросы для самопроверки	116

Глава двадцать вторая

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 22.1.	Определение переменного электромагнитного поля	117
§ 22.2.	Первое уравнение Максвелла	118
§ 22.3.	Уравнение непрерывности	119
§ 22.4.	Второе уравнение Максвелла	119
§ 22.5.	Уравнения Максвелла в комплексной форме записи	121
§ 22.6.	Теорема Умова — Пойнтинга для мгновенных значений	121
§ 22.7.	Теорема Умова — Пойнтинга в комплексной форме записи	127
§ 22.8.	Некоторые замечания к § 22.1.	128
§ 22.9.	Основные положения электродинамики движущихся сред (основы релятивистской электродинамики)	130
	Вопросы для самопроверки	132

Глава двадцать третья

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

§ 23.1.	Уравнения Максвелла для проводящей среды	133
§ 23.2.	Плоская электромагнитная волна	134
§ 23.3.	Распространение плоской электромагнитной волны в однородном проводящем полупространстве	137
§ 23.4.	Глубина проникновения и длина волны	138
§ 23.5.	Магнитный поверхностный эффект	139
§ 23.6.	Электрический поверхностный эффект в плоской шине. Эффект близости	142
§ 23.7.	Неравномерное распределение тока в прямоугольной шине, находящейся в пазу электрической машины	143
§ 23.8.	Поверхностный эффект в цилиндрическом проводе	143
§ 23.9.	Применение теоремы Умова — Пойнтинга для определения активного и внутреннего индуктивного сопротивления проводников при переменном токе	146
§ 23.10.	Экранирование в переменном электромагнитном поле	147
§ 23.11.	Сопоставление принципов экранирования в электростатическом, магнитном и электромагнитном полях	147
§ 23.12.	Высокочастотный нагрев металлических деталей и несовершенных диэлектриков	148
	Вопросы для самопроверки	148

Глава двадцать четвертая

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОДНОРОДНОМ И ИЗОТРОПНОМ ДИЭЛЕКТРИКАХ И В ПОЛУПРОВОДЯЩИХ И ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

§ 24.1.	Распространение электромагнитных волн в однородном и изотропном диэлектрике	148
§ 24.2.	Плоские волны в однородных и изотропных полупроводящих средах	152

§ 24.3.	Граничные условия на поверхности раздела двух полупроводящих сред	154
§ 24.4.	Переходные и релаксационные процессы в несовершенных диэлектриках	154
§ 24.5.	О расчете полей в несовершенных диэлектриках и вязких средах при установившемся синусоидальном режиме	155
§ 24.6.	Определение гиротропной среды	156
§ 24.7.	Тензор магнитной проницаемости феррита	156
§ 24.8.	Распространение плоской волны в гиромагнитной среде	157
	Вопросы для самопроверки	159

Глава двадцать пятая

ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

§ 25.1.	Вывод уравнений для $\vec{A}$ и φ в переменном электромагнитном поле и их решение	159
§ 25.2.	Запаздывающие потенциалы переменного электромагнитного поля	166
§ 25.3.	Комплексная форма записи запаздывающего векторного потенциала	166
§ 25.4.	Излучение электромагнитной энергии	167
§ 25.5.	Понятие об излучающем диполе	173
§ 25.6.	Дополнительный анализ поля излучения	174
§ 25.7.	Расчет поля реальных излучателей	176
§ 25.8.	Излучение магнитного диполя и принцип двойственности	177
§ 25.9.	Переход плоской электромагнитной волны из одной среды в другую	178
	Вопросы для самопроверки	180

Глава двадцать шестая

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

§ 26.1.	Понятие о волноводах и объемных резонаторах	180
§ 26.2.	Типы волн в волноводе. Решение для Н-волны.	183
§ 26.3.	Волновое сопротивление. Фазовая и групповая скорости	187
§ 26.4.	Решение для Е-волны	188
§ 26.5.	Аналогия между волноводом и линией с распределенными параметрами	188
§ 26.6.	Граничные условия Леонтовича	188
§ 26.7.	Запредельный волновод	189
§ 26.8.	Линии с поверхностными волнами и полосковые линии	189
	Вопросы для самопроверки.	190

Глава двадцать седьмая

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

§ 27.1.	Движение электрона в равномерном магнитном поле, неизменном во времени и направленном перпендикулярно скорости	190
§ 27.2.	Движение электрона в неизменном во времени магнитном поле, когда скорость электрона не перпендикулярна силовым линиям	191

§ 27.3.	Фокусировка пучка электронов постоянным во времени магнитным полем (магнитная линза)	191
§ 27.4.	Движение электронов в равномерном электрическом поле. Принцип работы электронного осциллографа	192
§ 27.5.	Фокусировка пучка электронов постоянным во времени электрическим полем (электрическая линза)	192
§ 27.6.	Движение электрона в равномерных, взаимно перпендикулярных, неизменных во времени магнитных и электрических полях	193
§ 27.7.	Движение заряженных частиц в кольцевых ускорителях	194

Глава двадцать восьмая

ОСНОВЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 28.1.	Определение магнитной гидродинамики и краткая характеристика областей ее применения	195
§ 28.2.	Уравнения магнитной гидродинамики	196
§ 28.3.	Просачивание (диффузия) магнитного поля	197
§ 28.4.	Электромагнитный барьер	198
§ 28.5.	Вмороженное поле	198
§ 28.6.	Возникновение волн в плазме	198
§ 28.7.	Эффект сжатия (пинч-эффект)	200
§ 28.8.	Принцип работы магнитного насоса и магнитного вентиля	200
§ 28.9.	Принцип работы магнитного гидродинамического генератора	200
§ 28.10.	Принцип работы плазменного реактивного двигателя	201

ПРИЛОЖЕНИЯ К ЧАСТИ III

Приложение E'

Расчет полей по методу сеток и моделирование полей по методу электрических сеток	202
§ E'.1. Расчет полей по методу сеток	202
§ E'.2. Моделирование полей по методу электрических сеток	204

Приложение Ж

Метод Грина	205
§ Ж.1. Формулы Грина	205
§ Ж.2. Гармонические функции	205
§ Ж.3. Интеграл Грина для гармонических функций	206
§ Ж.4. Функция Грина	207
§ Ж.5. Определение потенциала φ через функцию Грина в общем случае	207

Приложение З

Метод интегральных уравнений	208
§ 3.1. Первый вариант метода интегральных уравнений	208
§ 3.2. Второй вариант метода интегральных уравнений	210

Приложение И

Метод конформных преобразований (отображений)	212
§ И.1. Комплексный потенциал	212

§ И.2. Конформные преобразования	212
§ И.3. Прямая и обратная задачи расчета полей по методу конформных преобразований	214
§ И.4. Преобразование равномерного поля на плоскости z в поле верхней полуплоскости w	216
§ И.5. Интеграл Кристоффеля — Шварца	216
§ И.6. Применение интеграла Кристоффеля — Шварца	217
§ И.7. Интеграл Шварца	219

Приложение К

История развития электротехники и становления курса ТОЭ	220
---	-----

Приложение Л

Свойства некоторых проводниковых материалов и диэлектриков	223
Литература по теории электромагнитного поля и смежным вопросам	224

Лев Алексеевич Бессоноз

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Электромагнитное поле

Редактор Е. А. Орехова. Художественный редактор Т. М. Скворцова. Переплет художника Ф. Н. Буданова. Технический редактор Е. И. Герасимова. Корректор М. М. Малиновская

ИБ 1089

Изд. № ЭР—235. Сдано в набор 09.01.78. Подп. в печать 04.05.78. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 14,5 усл. печ. л. 14,15 уч.-изд. л. Тираж 125 000 экз. Зак. № 1730. Цена 65 коп. Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14
Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

65к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКВА
1978 год
ВЫСШАЯ ШКОЛА

